Calcolo letterale

Le espressioni letterali

Sono espressioni contenenti numeri reali e lettere.

$$A=(B+b)h/2$$

$$A=2(b+h)$$

Le lettere rappresentano numeri reali.
La stessa lettera assume sempre lo stesso valore.

Le espressioni letterali

Le espressioni letterali tali che a nessuna delle lettere è applicata l'operazione di reciproco sono dette intere.

Altrimenti si dicono frazionarie.

Le espressioni letterali frazionarie possono perdere significato per alcuni dei valori delle variabili.

Le espressioni letterali

$ax^2:b$	$b \neq 0$
$\frac{1}{a+2}$	$a \neq -2$
$\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$	$a \neq 0$ e $b \neq 0$
$(a)^{-1}$	$a \neq 0$

Le espressioni letterali

$F=ma$

$P*V=cost$

$$P = \frac{C}{V}$$

I monomi

I monomi sono espressioni composte da prodotti tra numeri reali e lettere.

$$A = l \cdot l = l^2$$

$$A = bh/2$$

Un monomio si dice ridotto in forma normale quando le lettere compaiono una sola volta.

I monomi

Si dicono <u>simili</u> monomi aventi la stessa parte letterale.

$2a$	$2ab$
$2a$	$3a^2$
$2a$	$3a$

I monomi

Si dicono <u>uguali</u> monomi aventi la stessa parte letterale e stesso coefficiente.

$2a$	$2ab$
$2a$	$2a^2$
$2a$	$2a$

I monomi

Si dicono <u>opposti</u> monomi aventi la stessa parte letterale e coefficiente opposto.

$2a$	$-2ab$
$2a$	$-2a^2$
$2a$	$-2a$

Operazioni tra monomi

Somma

Può essere effettuata solo tra monomi simili

Il risultato è ancora un monomio simile avente come coefficiente la somma dei coefficienti dei due addendi.

$$3a+2ax$$

$$3a+2a$$

$$\frac{1}{8}a-\sqrt{2}a$$

Operazioni tra monomi

Differenza

Può essere effettuata solo tra monomi simili

Il risultato è ancora un monomio simile avente come coefficiente la differenza dei coefficienti dei due addendi.

$$3a-2ax$$

$$3a-2a$$

$$\frac{1}{8}a-(-\sqrt{2}a)$$

Proprietà delle operazioni

Somma

- Commutativa
- Associativa
- Esistenza elemento neutro 0 $a+0=a$

Sottrazione

- ~~Commutativa~~
- ~~Associativa~~ $(ab-2ab)-ab \neq ab-(2ab-ab)$
- Esistenza elemento neutro 0 $a-0=a$

Operazioni tra monomi

Moltiplicazione

Si può effettuare tra monomi qualunque.

Il risultato è ancora un monomio che ha:

- Coefficiente pari al prodotto dei coefficienti
- Parte letterale formata da tutte le lettere presenti nei due monomi, con esponente pari alla somma degli esponenti che le stesse lettere hanno nei due fattori.

$$(3a) \cdot (2a)$$

$$(3ab) \cdot (2a^2xy^3)$$

$$\left(\tfrac{1}{8}avn\right) \cdot (\sqrt{2}ba)$$

Operazioni tra monomi

Elevamento a potenza (esponente naturale)

Il risultato è ancora un monomio che ha:

- Coefficiente pari alla potenza del coefficiente della base
- Parte letterale formata da tutte le potenze delle lettere presenti nel monomio che costituisce la base.

$$(3a^2b)^3$$

$$\left(-\frac{2}{3}xy^3z\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{8}\sqrt{2}bwa\right)^1$$

Operazioni tra monomi

Divisione

Si può effettuare tra due monomi A e B, con B non nullo, se il monomio A contiene tutte le lettere del monomio B ma di grado maggiore o uguale.

Il risultato è ancora un monomio che ha:

- Coefficiente pari al quoziente dei coefficienti
- Parte letterale formata da tutte le lettere presenti nei due monomi, con esponente pari alla sottrazione degli esponenti che le stesse lettere hanno nei due fattori.

$$(2x^2):x$$

$$\left(\frac{2}{3}x^2y^3z^4\right):\left(\frac{4}{18}xy^3z\right)$$

$$(2ax):(ax^2) \qquad (2ax):(az)$$

Proprietà delle operazioni

Prodotto

- Commutativa
- Associativa
- Esistenza elemento neutro 1 $a \times 1 = a$
- $a \times 0 = 0$
- Legge di annullamento del prodotto

$$a \times b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

Prodotto e somma

Distributiva $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Proprietà delle operazioni

Divisione

~~Commutativa~~

~~Associativa~~ $(8ya^3:4y):2a \neq 8ya^3:(4y:2a)$

Esistenza elemento neutro 1 $a:1=a$

$0:a=0$ $a:0$ **IMPOSSIBILE**

$0:0$ **forma indeterminata**

Divisione e somma

Distributiva $(a+b):c = a:c + b:c$

~~Distributiva~~ $a:(b+c) \neq a:b + a:c$

Divisione e prodotto $a:(bc) \neq (a:b)c$

Proprietà delle operazioni

Elevamento a potenza

- $a^b \quad a^c = a^{b+c}$
- $a^b : a^c = a^{b-c}$
- $(a^b)^c = a^{bc}$
- $a^b \quad c^b = (ac)^b$
- $a^b : c^b = (a:c)^b$

Esercizi

Calcolare $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{-2}+\frac{a+b}{a-b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ per a=2 e b=-3.

Esercizi

$$\left[\left(x^2y-\frac{1}{3}yx^2\right)^2:(x^2-3x^2)^2\right]^2+\left(\frac{1}{2}y^4x^2\right):(2x^2)+y^4$$

$$\left\{\left[\left(a^{234}x^{20}y^{12}+\frac{4}{7}a^{234}y^{12}x^{20}\right)^3:(x^2+3x^2)^2\right]^7\right\}^0$$

$$\left[a-x\left(x+\frac{x}{3}\right)\left(x-\frac{x}{3}\right):\left(x+\frac{x}{3}\right)+\frac{2}{3}x^2\right]^2-\left[2\left(a-\frac{a}{2}\right)\right]^2$$

I polinomi

I polinomi sono espressioni composte dalla somma di monomi.

$$A=(B+b)h/2$$

$$A=2(b+h)$$

I polinomi

Si dicono uguali due polinomi ridotti in forma normale tali che ogni monomio del primo polinomio compare anche nel secondo.

$2a+4c^2h-7qs^3i^2$ $\qquad$ $4c^2h-7s^3i^2q+2a$

I polinomi

Si dicono <u>opposti</u> due polinomi composti dallo stesso numero di monomi e tali che per ogni monomio del primo, il secondo polinomio contiene il suo opposto.

$2a+4c^2h-7qs^3i^2$ $\qquad$ $-4c^2h+7s^3i^2q-2a$

Operazioni tra polinomi

Somma

Può essere effettuata sempre ed il risultato è ancora un polinomio.

Si scrive un unico polinomio ottenuto sommando i vari addendi e poi si riducono gli eventuali termini simili.

$3a+2ax \qquad -3ax+2ab-\frac{5}{8}b \qquad \frac{1}{8}b-\sqrt{2}a-7ab$

Operazioni tra polinomi

Differenza

Può essere effettuata sempre ed il risultato è ancora un polinomio.

Si ottiene sommando al polinomio *A* l'opposto del polinomio B.

$-3ax+2ab-\frac{5}{8}b \qquad \frac{1}{8}b-\sqrt{2}a-7ab$

Operazioni tra polinomi

Moltiplicazione

Può essere effettuata sempre ed il risultato è ancora un polinomio.

Si effettua ricorrendo alla proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma e poi riducendo eventuali termini simili.

$a-3b$ $\qquad$ a^2+ab-b

Operazioni tra polinomi

Moltiplicazione

L'importanza delle parentesi

$(x+1)(x+2)$

$x+1(x+2) = x^2+2x+x+2$

Esercizi

$$a^2 - [a(a-b) - 2a(a+b) - 3a^2] + a(a-b) - (a+b)(a-b)$$

$$\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right)\left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right) + x(x-y) - 2xy$$

Verificare la seguente identità

$$2x\left(\frac{x}{2} - \frac{xy}{3}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{xy}{3}\right) = 2x^3\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{9}\right)$$

Operazioni tra polinomi

Potenza di un polinomio

Può essere effettuata sempre ed il risultato è ancora un polinomio.

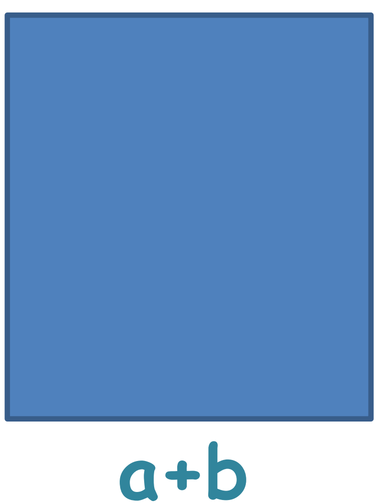
L'operazione è generalmente lunga e complessa ma ci sono alcuni casi particolari che consentono di semplificare l'operazione.

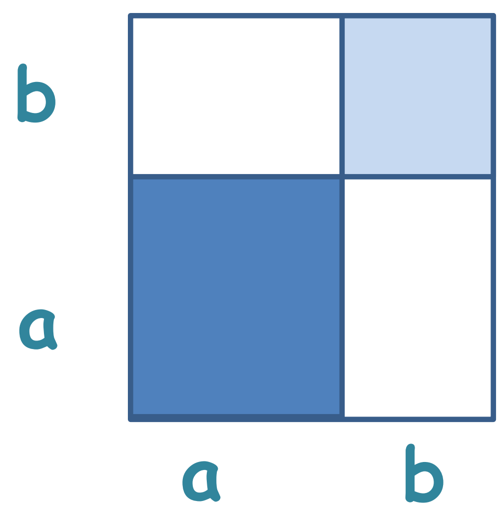
Operazioni tra polinomi

Prodotti notevoli

Quadrato di un binomio

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$





Operazioni tra polinomi

Prodotti notevoli

Cubo di un binomio

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$$

Operazioni tra polinomi

Prodotti notevoli

Somma per differenza

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Esercizi

$$(3a^2 + 5ab)(3a^2 - 5ab)$$

$$\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y^2z\right)^2$$

$$(2a - zy)^3 - (2a - zy)(2a + zy)^2 - a(2a - zy)^2$$

Verificare la seguente identità

$$(a + b)^3 + (2a + b)^3 = (3a + 2b)[a(2a + b) + (a + b)^2]$$

Operazioni tra polinomi

Divisione per un monomio non nullo

Si può eseguire in modo esatto quando il monomio divide tutti i monomi che compongono il polinomio.

Il risultato si ottiene applicando la proprietà distributiva della somma rispetto alla divisione

$3x^3-4a^2x^2+\frac{1}{4}x^4a$ $\qquad$ $\frac{1}{3}x^2$

Operazioni tra polinomi

Teorema di Ruffini

Un polinomio $P(x)$ è divisibile per il binomio $(x-a)$ se e solo se $P(a)=0$.

Ogni valore della variabile che rende nullo il polinomio è detto radice o zero del polinomio.

Esempi:

$$(a^2+2a+1):(a+1)$$

$$(x^3y^3-2x^2y^2+xy):(xy-1)$$

Scomposizione in fattori di un polinomio

Scomporre in fattori significa trasformare in un prodotto.

Si può scomporre un polinomio mediante:

- Raccoglimenti
- Prodotti notevoli
- Teorema di Ruffini

Scomposizione in fattori di un polinomio

Raccoglimenti

Si sfrutta la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

$$ax(b+c) = axb + axc$$

Consiste nel raccogliere i fattori comuni ai vari monomi che compongono il polinomio.

E' conveniente mettere in evidenza il MCD.

Scomposizione in fattori di un polinomio

Raccoglimenti

$$kx^2+k^2x-k^3xy+k^4$$

$$-3x^2a^3y^{15}+\frac{1}{3}x^3a^2y^5z+4a^2x^2$$

$$3x(a-b)+5(a-b)+7y(a-b)$$

Scomposizione in fattori di un polinomio

Raccoglimenti successivi o parziali

Se i vari monomi che compongono il polinomio non hanno fattori comuni possiamo vedere se il polinomio può considerarsi come somma di polinomi che hanno fattori comuni e procedere a raccoglimenti parziali. Poi valutare se i termini ottenuti hanno fattori comuni e raccogliere.

$$3ax-3xb+5a-5b+7ay-7yb$$

Scomposizione in fattori di un polinomio

Raccoglimenti successivi o parziali

$$am-bm+cm+an-bn+cn-ad+bd-cd$$

$$x^2a^3-x^3a^2+3a-3x$$

Scomposizione in fattori di un polinomio

Prodotti notevoli

Si tratta di riconoscere lo sviluppo di un prodotto notevole e scriverlo come prodotto o potenza.

Scomposizione in fattori di un polinomio

Prodotti notevoli

$$9a^2+42ab+49b^2$$

$$8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$$

$$-a^4b^6+100a^6b^8$$

$$-x^3a^3+3x^2a^2b-3xab^2+b^3$$

$$81c^4+18c^2b^2+b^4$$

$$a^4-2a^2b^2+b^4-c^2$$

Scomposizione in fattori di un polinomio

Prodotti notevoli e raccoglimenti

$$3a^3-2a^2-3a+2$$

$$a^2-b^2+a^3b^2-a^2b^3+ax-bx$$

Scomposizione in fattori di un polinomio

Teorema di Ruffini

Quando il polinomio da scomporre è in una variabile si può provare a vedere se è divisibile in modo esatto per un binomio di primo grado nella stessa variabile, usando il Teorema di Ruffini.

Il problema si riduce nel trovare un numero a tale che $P(a)=0$.

Infatti, se $P(a)=0$ allora $P(x)=Q(x)(x-a)$.

Scomposizione in fattori di un polinomio

Teorema di Ruffini

Il problema si riduce nel trovare un numero a tale che P(a)=0.

Il valore di a deve essere cercato tra i divisori del temine noto o tra i suoi rapporti con i divisori del coefficiente del termine di grado massimo del polinomio.

Scomposizione in fattori di un polinomio

Teorema di Ruffini

$$6x^3+2x^2-x+12$$

± 1 ± 2 ± 3 ± 4 ± 6 ± 12

$\pm\frac{1}{2}$ $\pm\frac{1}{3}$ $\pm\frac{1}{6}$ $\pm\frac{2}{3}$ $\pm\frac{3}{2}$ $\pm\frac{4}{3}$

Scomposizione in fattori di un polinomio

Teorema di Ruffini

$$x+4x^3+1$$

$$2x^3-2x^2-3x-2$$

$$x^2y^2-11xy+30$$

$$x^3+5x^2+6x$$

Le frazioni algebriche

Un rapporto tra due polinomi A e B, di cui B non nullo, è detto frazione algebrica.

$$\frac{x+y}{a-5b}$$

$$x+y=\frac{x+y}{1}$$

Le frazioni algebriche

Il denominatore di una frazione algebrica non può essere nullo, dobbiamo quindi capire quali valori fanno perdere significato all'espressione.

L'insieme dei valori per cui la frazione algebrica ha significato (che non annullano il denominatore) si chiama dominio.

Le frazioni algebriche

$$\frac{x+2}{x}$$

$$\frac{x+2}{x-2}$$

$$\frac{3}{1-ab}$$

$$\frac{3}{x^2-y^2}$$

Le frazioni algebriche

E' possibile semplificare una frazione algebrica dividendo numeratore e denominatore per uno stesso termine <u>non nullo</u>.

$$\frac{x^2-4}{x(x-2)} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} \qquad \frac{x+2}{x}$$

$$\frac{3(x-y)}{x^2-2xy+y^2} = \frac{3(x-y)}{(x-y)2} \qquad \frac{3}{x-y}$$

$$\frac{\cancel{a}+b}{\cancel{a}+c}$$

$$\frac{5+3}{5+7} \neq \frac{3}{7}$$

$$\frac{x+\cancel{y}}{a+\cancel{y}}$$

Operazioni tra frazioni algebriche

Moltiplicazione

Il risultato è ancora una frazione algebrica avente per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

Per eseguire la moltiplicazione si deve:

- Valutare il dominio delle frazioni
- Eseguire il calcolo
- Ridurre ai minimi termini

Operazioni tra frazioni algebriche

Moltiplicazione

$$\frac{2x^2ya^2}{b^3c} \cdot \frac{\frac{3}{2}b^2c^2}{x^3a} \cdot \frac{4a^3}{b}$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} \cdot \frac{4x-4}{x^2-2x+1}$$

Operazioni tra frazioni algebriche

Elevamento a potenza

L'esponente si applica sia al numeratore che al denominatore.

Operazioni tra frazioni algebriche

Elevamento a potenza

$$\left(-\frac{2}{ab}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)^2$$

Operazioni tra frazioni algebriche

Divisione

Data una frazione algebrica $\frac{P}{Q}$, la sua inversa è quella frazione algebrica $\frac{Q}{P}$ che moltiplicata per la prima dà 1.

Il quoziente di due frazioni algebriche A e B, con B non nulla, si calcola moltiplicando la prima frazione per l'inverso della seconda.

Operazioni tra frazioni algebriche

Divisione

$$\frac{2}{x-1} : \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{\dfrac{3x}{x^2+x}}{x-2}$$

Operazioni tra frazioni algebriche

Somma e sottrazione

Si opera come nella somma di frazioni numeriche.

$$\frac{2}{x-1}+\frac{x+2}{x^2-1}$$

$$\frac{3x}{x^2+x}-\frac{2}{x^2-x-2}$$

Esercizi

$$\left(\frac{1}{2y+1}+\frac{4y}{1-4y^2}+\frac{1}{1-2y}\right):\frac{y^2+2y+1}{1-2y}$$

$$\left(-\frac{1}{3a}+\frac{1}{3a-2}\right)\cdot(3a-1):\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{3a-2}\right)$$