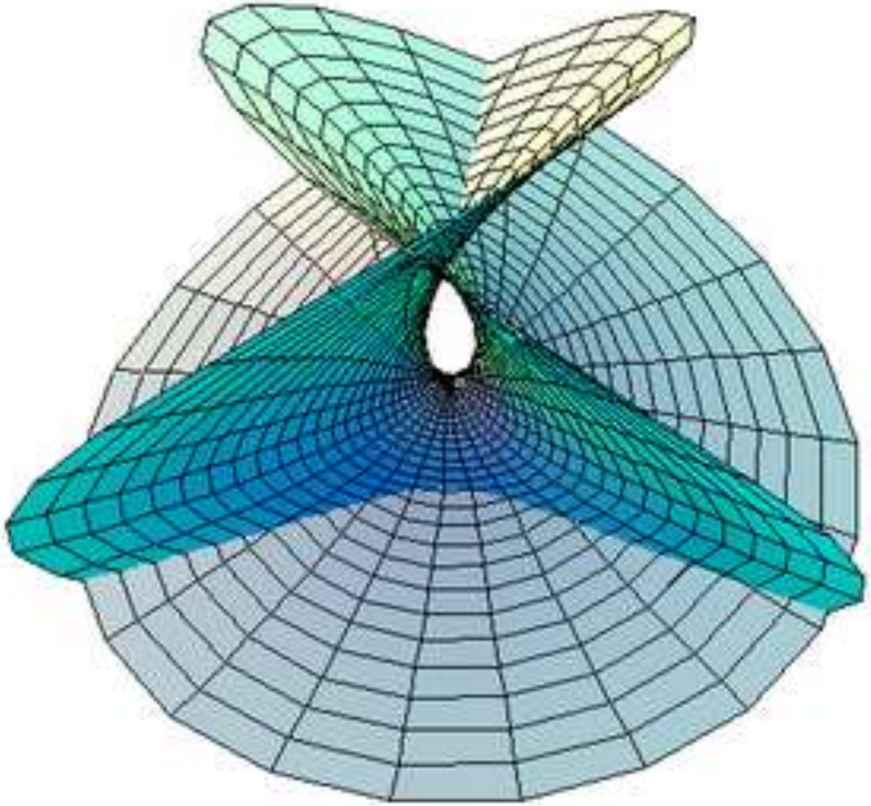
Equazioni e disequazioni



Le equazioni

Una uguaglianza tra espressioni letterali che risulta vera per ogni valore delle lettere che vi compaiono prende il nome di <u>identità</u>.

$2a=2a$ $\qquad$ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Una uguaglianza tra espressioni letterali che risulta vera o meno, a seconda dei valori attribuiti alle variabili che vi compaiono prende il nome di <u>equazione</u>.

$x=1$ $\qquad$ $x^2=4$

Le equazioni

Se in una equazione è presente una sola lettera essa assume il ruolo di incognita e l'obbiettivo è determinarne i valori che rendono vera l'uguaglianza.

Se in una equazione sono presenti più lettere sarà necessario precisare quale assume il ruolo di incognita. Le altre lettere si chiameranno parametri.

Le equazioni

- Intere → se sono uguaglianze tra polinomi
- Fratte → se l'incognita figura al denominatore
- Numeriche → se compare una sola variabile.
- Letterali → se compaiono più lettere.

Le equazioni

Si dice soluzione di una equazione ogni numero che sostituito al posto dell'incognita trasforma l'equazione in una identità.

Una equazione può avere:

- Nessuna soluzione → si dice impossibile
- Soluzioni finite → si dice determinata
- Infinite soluzioni → si dice indeterminata

Principi di equivalenza

Per risolvere una equazione, cioè determinarne le soluzioni, si applicano due principi di equivalenza:

1. Addizionando o sottraendo a entrambe i membri dell'equazione uno stesso temine (numero o espressione contenente l'incognita che risulti definita per ogni valore dell'incognita) si ottiene una equazione equivalente a quella data.

Principi di equivalenza

2. Moltiplicando o dividendo entrambe i membri dell'equazione per uno stesso temine (numero diverso da zero o espressione contenente l'incognita che risulti definita e non nulla per ogni valore dell'incognita) si ottiene una equazione equivalente a quella data.

Principi di equivalenza

Come conseguenza si ha che:

- si può spostare un addendo da un membro all'altro cambiandogli il segno,
- se uno stesso addendo compare in entrambe i membri esso può essere semplificato,
- è possibile cambiare il segno ad entrambe i membri,
- se i due membri sono costituiti da prodotti aventi un fattore comune (definito e non nullo per ogni valore dell'incognita) esso può essere semplificato, ottenendo equazioni equivalenti

Equazioni lineari

Sono equazioni numeriche intere in cui l'incognita ha grado 1.

La forma normale è $ax=b$.

Se $a=0$ e $b\neq0$ l'equazione è impossibile

Se $a=0$ e $b=0$ l'equazione è indeterminata.

Se $a \neq0$ e $b\neq0$ l'equazione ha una sola soluzione $x=b/a$

Equazioni lineari

Per risolvere un'equazione lineare è necessario:

1. Eseguire tutte le operazioni presenti nei due membri ed eventuali semplificazioni
2. Applicare i principi di equivalenza in modo da trasportare tutti i termini contenenti l'incognita al primo membro e gli altri al secondo membro
3. Semplificare in modo da ricondurre l'equazione in forma normale
4. Se $a \neq 0$ dividere ambo i membri per a.

Equazioni lineari

$$x(x-1)-2(x+3)-4=x(x-4)$$

$$-5(1-a)=3(a-2)+2a$$

$$2(y-2)-3y=-y-4$$

Equazioni lineari letterali

Sono equazioni in cui l'incognita ha grado 1 e compaiono altre lettere oltre l'incognita.

$$ax-2a=x+3$$

Si risolvono come quelle numeriche ma devo verificare che il coefficiente dell'incognita sia $\neq 0$, altrimenti l'equazione è indeterminata o impossibile.

Equazioni lineari letterali

$ax+2x-2a=4$

Risolvere rispetto a x e rispetto ad a

$$\frac{x}{3-b}+x=1$$

Equazioni riconducibili al primo grado

Equazioni fratte

- Discutere i denominatori individuando i valori dell'incognita per cui l'espressione perde significato
- Eseguire le operazioni nei due membri
- Applicare i principi di equivalenza in modo da trasformare l'equazione fratta in una intera
- Risolvere l'equazione intera
- Verificare che la soluzione trovata non appartenga all'insieme di valori non accettabili

Equazioni riconducibili al primo grado

Equazioni fratte

$$1+\frac{5}{x-3}=\frac{8-x}{x-3}$$

$$\frac{a}{x-1}=\frac{1}{a}$$

Equazioni riconducibili al primo grado

Se l'equazione è di grado superiore al primo ma è polinomiale è possibile scomporre in fattori il polinomio e applicare la legge di annullamento del prodotto.

$$b^2-3b=0$$

$$z^3+z^2-4z-4=0$$

Le disequazioni

Una disuguaglianza tra espressioni letterali che risulta vera o meno, a seconda dei valori attribuiti alle variabili che vi compaiono prende il nome di <u>disequazione</u>.

$2a \leq 3a$ $\qquad$ $(a+b)(a-b) > a^2$

Le disequazioni

Si dice soluzione di una disequazione ogni numero che sostituito al posto dell'incognita rende vera la disuguaglianza.

Una disequazione può avere:

- Nessuna soluzione
- Soluzioni finite (espresse in termini di intervalli della retta reale)
- Infinite soluzioni

Principi di equivalenza

Per risolvere una disequazione, cioè determinarne le soluzioni, si applicano due principi di equivalenza:

1. Addizionando o sottraendo a entrambe i membri dell'equazione uno stesso temine (numero o espressione contenente l'incognita che risulti definita per ogni valore dell'incognita) si ottiene una equazione equivalente a quella data.

Principi di equivalenza

2. Moltiplicando o dividendo entrambe i membri dell'equazione per uno stesso numero maggiore di zero si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

3. Moltiplicando o dividendo entrambe i membri dell'equazione per uno stesso numero minore di zero e cambiando il verso della disequazione si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

Disequazioni lineari

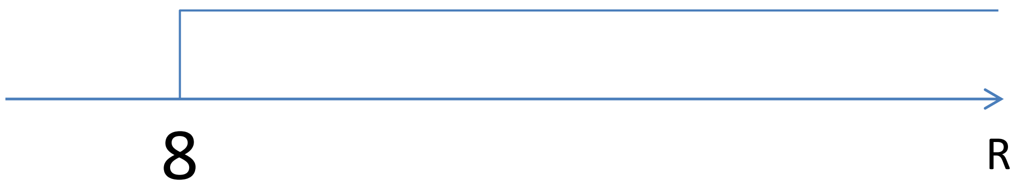
Per risolvere una disequazione lineare è necessario:

1. Eseguire tutte le operazioni presenti nei due membri ed eventuali semplificazioni
2. Applicare opportunamente i principi di equivalenza in modo che l'incognita compaia solo al primo membro e abbia coefficiente 1

Disequazioni lineari

Rappresentazione grafica delle soluzioni

$x>8$



Disequazioni lineari

$2(1-3x)-2<x+6\,(x-2)$

$$\frac{5-4x}{3}-\frac{x}{6}>2-\frac{4-x}{2}$$

Disequazioni lineari letterali

Sono disequazioni in cui l'incognita ha grado 1 e compaiono altre lettere oltre l'incognita.

$$ax>1$$

Si risolvono come quelle numeriche ma quando divido per una espressione letterale devo verificare che sia non nulla e devo discuterne il segno.

Disequazioni lineari letterali

$(a-1)x \leq 3(a-1)$

Risolvere rispetto a x e rispetto ad a

$$\frac{y}{b+2} > \frac{b}{b+2}$$

Disequazioni riconducibili al primo grado

Se la disequazione è di grado superiore al primo ma è riconducibile alla forma

$$A(x)\,B(x) \gtrless 0$$

allora è possibile determinarne le soluzioni studiando i segni dei singoli fattori da cui ricavare il segno complessivo.

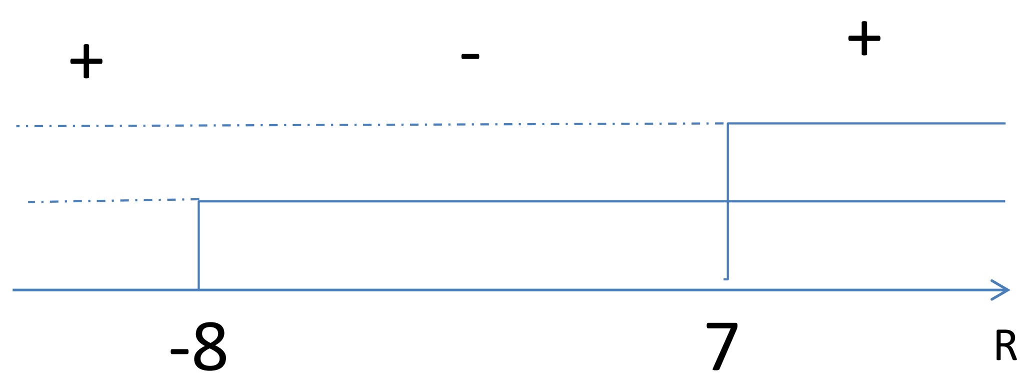
Disequazioni riconducibili al primo grado

$$(x-7)(x+8) > 0$$

Devo trovare i valori di x che rendono <u>positiva</u> l'espressione.

$x-7>0 \rightarrow x>7$

$x+8>0 \rightarrow x>-8$



$\boxed{x<-8 \quad o \quad x>7}$

Disequazioni riconducibili al primo grado

Disequazioni fratte

Per poter risolvere le disequazioni fratte bisogna applicare opportunamente i principi di equivalenza in modo da trasformare la disequazione nella forma $\frac{A(x)}{B(x)} \gtreqless 0$ e poi si studiano i segni del numeratore e del denominatore per ricavare il segno complessivo.

Disequazioni riconducibili al primo grado

Disequazioni fratte

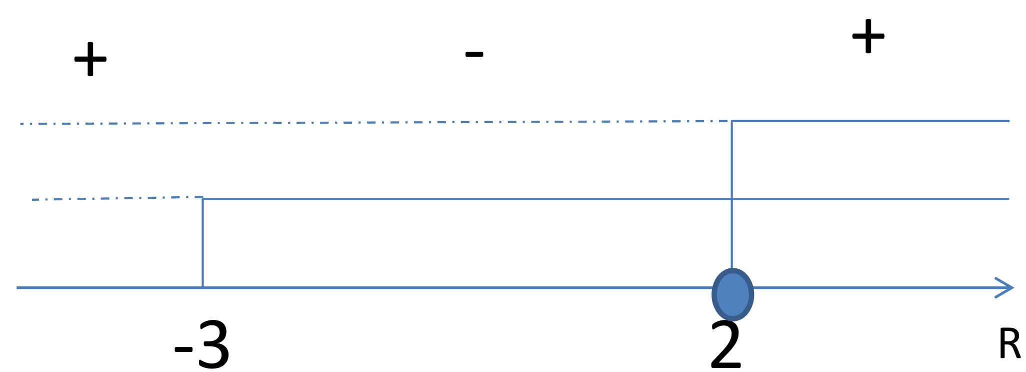
$$\frac{a-2}{a+3} \leq 0$$

Devo trovare i valori di a che rendono <u>negativa o nulla</u> l'espressione.

$a-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$

$a+3>0 \rightarrow x>-3$

$\boxed{-3<x\leq 2}$



Disequazioni riconducibili al primo grado

$$\frac{1-3x}{x-2} \geq 1$$

$$a^2 - a < 0$$

I sistemi

In matematica sono insiemi di relazioni (equazioni o disequazioni) che devono essere soddisfatte contemporaneamente.

Risolvere un sistema significa trovare l'insieme dei valori delle incognite che vi compaiono tale che le relazioni componenti il sistema siano contemporaneamente soddisfatte.

Sistemi lineari

Sono sistemi di due o più equazioni di primo grado in due o più incognite.

Si dice soluzione di un sistema con 2 (3,4, … n) incognite ogni coppia (terna, quaterna, … n-upla) che soddisfi ciascuna delle equazioni che lo costituiscono.

Può accadere che il sistema non abbia soluzioni o può averne infinite.

Sistemi lineari

Principi di equivalenza

Due sistemi si dicono equivalenti quando hanno le medesime soluzioni.

E’ possibile trasformare un sistema lineare in uno equivalente usando i seguenti principi di equivalenza:

Sistemi lineari

Principi di equivalenza

1. Sostituendo un'equazione del sistema con una equivalente si ottiene un sistema equivalente.

2. Esplicitando un'equazione del sistema rispetto ad una variabile e sostituendo il risultato in un'altra equazione si ottiene un sistema equivalente.

Sistemi lineari

Principi di equivalenza

3. Sostituendo un'equazione del sistema con la somma o sottrazione dell'equazione con un'altra del sistema stesso si ottiene un sistema equivalente.

Sistemi lineari in due incognite

Metodo del confronto

Si risolvono le due equazioni rispetto alla stessa incognita e si uguagliano le espressioni ottenute.

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$$

Sistemi lineari in due incognite

Metodo di riduzione

Si usa il primo principio per fare in modo che i coefficienti della prima incognita siano opposti.

Si usa il terzo principio sostituendo la seconda equazione con la somma delle due

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$$

Sistemi lineari in due incognite

Se applicando i metodi risolutivi una delle equazioni si trasforma in una identità il sistema è indeterminato.

$$\begin{cases} 2y - 2x = -4 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Se applicando i metodi risolutivi una delle equazioni risulta impossibile allora l'intero sistema è impossibile.

$$\begin{cases} 3x - 3y = 2 \\ 6y - 6x = 0 \end{cases}$$

Sistemi lineari in tre incognite

Si possono applicare gli stessi metodi di risoluzione visti finora.

$$\begin{cases} 2y - 2x + z = -4 \\ y = x - 2 \\ x + 2y - 2z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ y + x - z = 1 \\ 2y - 2x - 3z = 0 \end{cases}$$

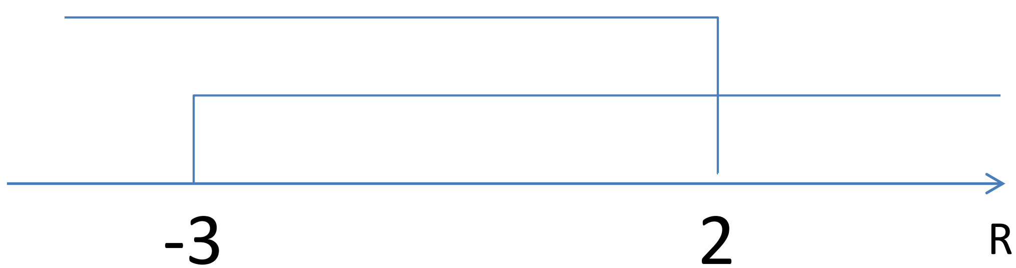
Sistemi di disequazioni

Si risolvono le singole disequazioni in un'incognita che lo compongono e si cercano le soluzioni comuni.

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x-2<0 \end{cases}$$

$x > -3$

$x < 2$



$\boxed{-3<x<2}$

Sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x-2<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x-2>0 \\ x-7<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} \geq 1 \\ x+1>0 \end{cases}$$