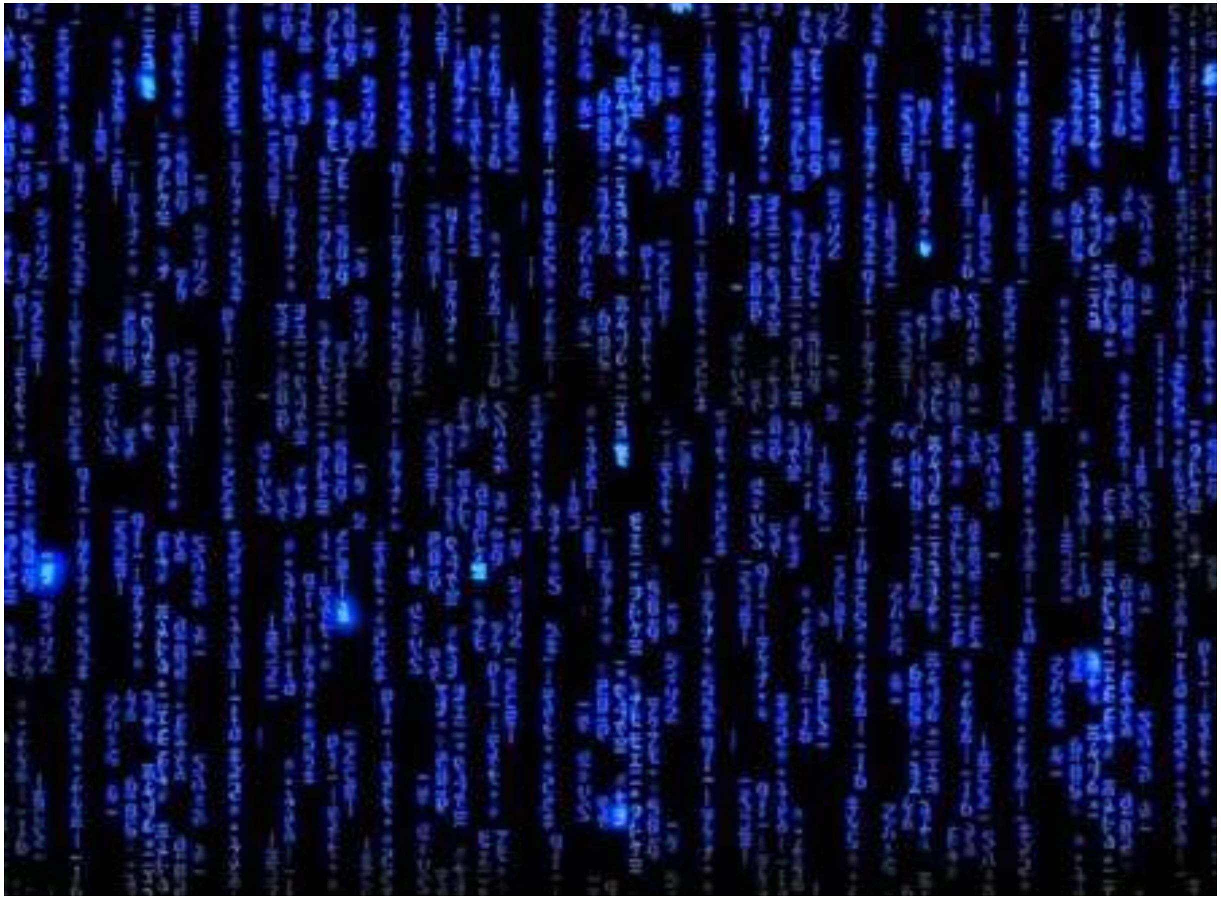
Le matrici



Le matrici

Le matrici sono tabelle di n righe ed m colonne i cui elementi sono numeri di un insieme K (R o C).

Tali elementi sono detti entrate della matrice.

$A_{n \times m}$

$a_{i,j}$

$i = 1, \ldots n$

$j = 1, \ldots m$

riga colonna

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$a_{3,2}$

Le matrici

$$A_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Ordine della matrice

Ogni riga della matrice è un vettore detto <u>vettore riga.</u> $a_{3,\,j}$

Ogni colonna della matrice è un vettore detto <u>vettore colonna.</u> $a_{i,\,2}$

Matrice nulla

$$A_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Se $a_{i,j}=0$, $\forall$ $i=1, \dots n \wedge \forall$ $j=1, \dots m$ allora la matrice si chiama matrice nulla O.

Le matrici

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Se $n \neq m$ la matrice si dice rettangolare.

Una matrice è quadrata se $n=m$.

L'insieme degli elementi in posizione i,i si dice diagonale principale.

Matrici uguali

Due matrici sono uguali se sono dello stesso ordine e hanno elementi uguali in posizione corrispondente.

$$A_{n \times m} = B_{n \times m} \Leftrightarrow \forall\ i=1, \dots n \wedge \forall\ j=1, \dots m, \quad a_{i,j} = b_{i,j}$$

Trasposta di una Matrice

La trasposta di una matrice nxm è una matrice mxn ottenuta scambiando gli indici di riga e colonna degli elementi della matrice di partenza.

$A_{n \times m} \rightarrow A^T_{m \times n}$ $\quad\quad$ $(A^T)_{i,j} = a_{j,i}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T$$

Matrici simmetriche

Una matrice quadrata è simmetrica se

$\forall\ i=1, \dots n \wedge \forall\ j=1, \dots n \qquad a_{i,j} = a_{j,i}$

$A_{n \times n} = A^T_{n \times n}$

$$S_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Matrici antisimmetriche

Una matrice quadrata è antisimmetrica se

$\forall$ i=1, … n $\wedge$ $\forall$ j=1, … m $\qquad a_{i,j} = -a_{j,i}$

$$A_{n \times n} = -A^T_{n \times n}$$

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

N.B. Gli elementi della diagonale devono essere 0.

Matrici triangolari

Una matrice quadrata si dice <u>triangolare superiore</u> se tutti gli elementi sotto la diagonale principale sono nulli.

$t_{i,j} = 0 \quad$ se $i<j$

$$T_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrici triangolari

Una matrice quadrata si dice <u>triangolare inferiore</u> se tutti gli elementi sopra la diagonale principale sono nulli.

$t_{i,j} = 0 \quad \text{se } i>j$

$$T_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrici diagonali

Una matrice quadrata si dice diagonale se tutti i suoi elementi sono nulli tranne quelli della diagonale principale.

$d_{i,\,j} = 0 \quad \text{se } i \neq j$

$$D_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matrici diagonali

Una matrice quadrata si dice diagonale se tutti i suoi elementi sono nulli tranne quelli della diagonale principale.

Se gli elementi della diagonale sono tutti 1 la matrice si chiama matrice Identità I.

$$I_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases} \qquad I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somma di Matrici

$$A_{n \times m} + B_{n \times m} = C_{n \times m}$$

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Proprietà della somma di matrici

- Commutativa $$A_{n \times m} + B_{n \times m} = B_{n \times m} + A_{n \times m}$$

$$a_{i,j} + b_{i,j} = b_{i,j} + a_{i,j}$$

Proprietà della somma di matrici

- Commutativa $\quad A_{n \times m} + B_{n \times m} = B_{n \times m} + A_{n \times m}$

- Associativa

$$(A_{n \times m} + B_{n \times m}) + C_{n \times m} = A_{n \times m} + (B_{n \times m} + C_{n \times m})$$

$$(a_{i,j} + b_{i,j}) + c_{i,j} = a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j})$$

Proprietà della somma di matrici

- Commutativa $\quad A_{n\times m} + B_{n\times m} = B_{n\times m} + A_{n\times m}$

- Associativa

$$(A_{n\times m} + B_{n\times m}) + C_{n\times m} = A_{n\times m} + (B_{n\times m} + C_{n\times m})$$

- Esistenza dell'elemento neutro O

$$A_{n\times m} + O_{n\times m} = A_{n\times m}$$

$$a_{i,j} + 0 = a_{i,j}$$

Proprietà della somma di matrici

- Commutativa $\quad A_{n \times m} + B_{n \times m} = B_{n \times m} + A_{n \times m}$

- Associativa

$$(A_{n \times m} + B_{n \times m}) + C_{n \times m} = A_{n \times m} + (B_{n \times m} + C_{n \times m})$$

- Esistenza dell'elemento neutro O

$$A_{n \times m} + O_{n \times m} = A_{n \times m}$$

- Esistenza dell'opposto $\quad - A_{n \times m} \rightarrow - a_{i,j}$

$$A_{n \times m} + (- A_{n \times m}) = O_{n \times m} \qquad a_{i,j} + (- a_{i,j}) = 0$$

Determinare la matrice opposta di

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Sottrazione tra Matrici

$$A_{n \times m} - B_{n \times m} = A_{n \times m} + (-B_{n \times m}) = C_{n \times m}$$

$$c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Proprietà della differenza di matrici

- ~~Commutativa~~ $A_{n\times m} - B_{n\times m} \neq B_{n\times m} - A_{n\times m}$

$$a_{i,j} - b_{i,j} \neq b_{i,j} - a_{i,j}$$

Proprietà della differenza di matrici

- ~~Commutativa~~ $A_{n \times m} - B_{n \times m} \neq B_{n \times m} - A_{n \times m}$
- ~~Associativa~~

$$(A_{n \times m} - B_{n \times m}) - C_{n \times m} \neq A_{n \times m} - (B_{n \times m} - C_{n \times m})$$

$$(a_{i,j} - b_{i,j}) - c_{i,j} = a_{i,j} - (b_{i,j} - c_{i,j})$$

Proprietà della differenza di matrici

- ~~Commutativa~~ $A_{n \times m} - B_{n \times m} \neq B_{n \times m} - A_{n \times m}$
- ~~Associativa~~

$$(A_{n \times m} - B_{n \times m}) - C_{n \times m} \neq A_{n \times m} - (B_{n \times m} - C_{n \times m})$$

- Esistenza dell'elemento neutro

$$A_{n \times m} - O_{n \times m} = A_{n \times m} \qquad a_{i,j} - 0 = a_{i,j}$$

$$O_{n \times m} - A_{n \times m} = -A_{n \times m}$$

Prodotto di uno scalare per una matrice o prodotto esterno

$$k \cdot A_{n \times m} = B_{n \times m} \qquad \qquad k \in R$$

$$b_{i,j} = k \cdot a_{i,j}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Proprietà del prodotto esterno

- Commutativa per gli scalari $a \cdot b \cdot M = b \cdot a \cdot M$
- Associativa $a \cdot (b \cdot M) = (a \cdot b) \cdot M$
- Esistenza dell'elemento neutro $a=1$ $1 \cdot M = M$
- Distributiva $(a + b) \cdot M = a \cdot M + b \cdot M$

  $a \cdot (M + N) = a \cdot M + a \cdot N$
- $-1 \cdot M = -M$
- $0 \cdot M = O$

L'insieme delle matrici è uno spazio vettoriale

Prodotto tra matrici (righe per colonne)

$$A_{n \times p} \times B_{p \times m} = C_{n \times m}$$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \cdot b_{k,j} \qquad\qquad c_{i,j} = a_{i,k} \circ b_{k,j}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Proprietà del prodotto tra matrici

• ~~Commutativa~~ $A_{n \times n} \times B_{n \times n} \neq B_{n \times n} \times A_{n \times n}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Proprietà del prodotto tra matrici

- ~~Commutativa~~

- Associativa

$$(A_{n \times p} \times B_{p \times m}) \times C_{m \times r} = A_{n \times p} \times (B_{p \times m} \times C_{m \times r})$$

Proprietà del prodotto tra matrici

- ~~Commutativa~~

- Associativa

$$(A_{n\times p} \times B_{p\times m}) \times C_{m\times r} = A_{n\times p} \times (B_{p\times m} \times C_{m\times r})$$

- Esistenza dell'elemento neutro $I_{n\times n}$

$$A_{m\times n} \times I_{n\times n} = A_{m\times n} \qquad I_{n\times n} \times A_{n\times m} = A_{n\times m}$$

$$\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \cdot I_{k,j} = a_{i,j}$$

Proprietà del prodotto tra matrici

- ~~Commutativa~~

- Associativa

$$(A_{n \times p} \times B_{p \times m}) \times C_{m \times r} = A_{n \times p} \times (B_{p \times m} \times C_{m \times r})$$

- Esistenza dell'elemento neutro $I_{n \times n}$

$$A_{m \times n} \times I_{n \times n} = A_{m \times n} \qquad I_{n \times n} \times A_{n \times m} = A_{n \times m}$$

- Esistenza dell'inverso $A_{n \times n} \rightarrow A^{-1}_{n \times n}$

$$A_{n \times n} \times A^{-1}_{n \times n} = A^{-1}_{n \times n} \times A_{n \times n} = I_{n \times n}$$

Proprietà del prodotto tra matrici

Linearità

- Distributività rispetto alla somma di matrici

$$(A_{n\times m}+B_{n\times m})\times C_{m\times p} = A_{n\times m}\times C_{m\times p}+B_{n\times m}\times C_{m\times p}$$
$$A_{n\times m}\times (B_{m\times p}+C_{m\times p}) = A_{n\times m}\times B_{m\times p}+A_{n\times m}\times C_{m\times p}$$

- $k(A_{n\times m}\times B_{m\times p}) = (kA_{n\times m})\times B_{m\times p} = A_{n\times m}\times (kB_{m\times p})$

Determinante di una matrice quadrata

Il determinante di una matrice quadrata su K è un elemento di K associato alla matrice e definito come: $\det A = \sum_{p \in \sigma_n} \varepsilon(p) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}$

$$\det A = \sum_{p \in \sigma_n} segno(p) \cdot a_{1,p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,p(n)}$$

insieme delle permutazioni dei numeri 1 … n

1 se p pari

-1 se p dispari

numeri naturali da 1 a n

Determinante di una matrice quadrata 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \sum_{p \in \sigma_n} segno(p) \cdot a_{1,p(1)} \cdot \ldots a_{n,p(n)}$$

$$= a_{1,1} \cdot a_{2,2} + (-1) a_{1,2} \cdot a_{2,1}$$

Determinante di una matrice quadrata 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \sum_{p \in \sigma_n} segno(p) \cdot a_{1,p(1)} \cdot \ldots a_{n,p(n)}$$

$$= a_{1,1}\left[a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,2}\right]$$

$$-a_{1,2}\left[a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,1}\right]$$

$$+a_{1,3}\left[a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{2,2} \cdot a_{3,1}\right]$$

Determinante di una matrice quadrata 3x3

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\det A=\sum_{p\in\sigma_n} segno(p)\cdot a_{1,p(1)}\cdot\ldots a_{n,p(n)}$$

$$=a_{1,1}\left[a_{2,2}\cdot a_{3,3}-a_{2,3}\cdot a_{3,2}\right]$$

$$-a_{1,2}\left[a_{2,1}\cdot a_{3,3}-a_{2,3}\cdot a_{3,1}\right]$$

$$+a_{1,3}\left[a_{2,1}\cdot a_{3,2}-a_{2,2}\cdot a_{3,1}\right]$$

Determinante di una matrice quadrata 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \sum_{p \in \sigma_n} segno(p) \cdot a_{1,p(1)} \cdot \ldots a_{n,p(n)}$$

$$= a_{1,1}\left[a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,2}\right]$$

$$-a_{1,2}\left[a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,1}\right]$$

$$+a_{1,3}\left[a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{2,2} \cdot a_{3,1}\right]$$

Determinante di una matrice quadrata 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \sum_{p \in \sigma_n} segno(p) \cdot a_{1,p(1)} \cdot \ldots a_{n,p(n)}$$

$$= -a_{1,2} \cdot \left[a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,1} \right]$$

$$+a_{2,2} \cdot \left[a_{1,1} \cdot a_{3,3} - a_{1,3} \cdot a_{3,1} \right]$$

$$-a_{3,2} \cdot \left[a_{1,1} \cdot a_{2,3} - a_{1,3} \cdot a_{2,1} \right]$$

Proprietà del determinante

$$\det A = \sum_{p \in \sigma_n} \varepsilon(p) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}$$

Osservo che il determinante è una somma di prodotti, ciascuno dei quali contiene un elemento di ciascuna riga e di ciascuna colonna.

- det O = 0
- Se la matrice ha una riga tutta di 0 il suo determinante è 0

Proprietà del determinante

$$\det A = \sum_{p \in \sigma_n} \varepsilon(p) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}$$

Osservo che il determinante è una somma di prodotti, ciascuno dei quali contiene un elemento di ciascuna riga e di ciascuna colonna.

- Se *A* è triangolare o diagonale allora det *A* = prodotto degli elementi diagonali.
- det I = 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Proprietà del determinante

- $\det A = \det A^T$

$$\det A^T = \sum_{p \in \sigma_n} \varepsilon(p) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{p(i),i} = \sum_{q \in \sigma_n} \varepsilon(q) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,q(j)} = \det A$$

Proprietà del determinante

- $\det A = \det A^T$
- Se B è ottenuta scambiando due righe o due colonne di A allora det B = -det A

$$\det B = \sum_{p\in\sigma_n} \varepsilon(p)\cdot b_{1,p(1)}\cdot\ldots\cdot b_{i,p(i)}\cdot\ldots\cdot b_{j,p(j)}\cdot\ldots\cdot b_{n,p(n)}$$

$$= \sum_{p\in\sigma_n} \varepsilon(p)\cdot a_{1,p(1)}\cdot\ldots\cdot a_{j,p(j)}\cdot\ldots\cdot a_{i,p(i)}\cdot\ldots\cdot a_{n,p(n)}$$

$$= \varepsilon(1)\sum_{p\in\sigma_n} \varepsilon(p)\cdot a_{1,p(1)}\cdot\ldots\cdot a_{i,p(i)}\cdot\ldots\cdot a_{j,p(j)}\cdot\ldots\cdot a_{n,p(n)}$$

$$= -\det A$$

Proprietà del determinante

- $\det A = \det A^T$
- Se B è ottenuta scambiando due righe o due colonne di A allora $\det B = -\det A$
- Se la matrice ha due righe uguali il suo determinante è 0.

Proprietà del determinante

- Se B è ottenuto da A moltiplicando una riga per c allora det B = c det A

$$\det B = \sum_{p \in \sigma_n} \varepsilon(p) \cdot b_{1,p(1)} \cdot \ldots \cdot b_{i,p(i)} \cdot \ldots \cdot b_{n,p(n)}$$

$$= \sum_{p \in \sigma_n} \varepsilon(p) \cdot a_{1,p(1)} \cdot \ldots \cdot c \cdot a_{i,p(i)} \cdot \ldots \cdot a_{n,p(n)}$$

$$= c \sum_{p \in \sigma_n} \varepsilon(p) \cdot a_{1,p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i,p(i)} \cdot \ldots \cdot a_{n,p(n)} = c \cdot \det A$$

Proprietà del determinante

- Se B è ottenuto da A moltiplicando una riga per c allora det A = c det B
- Se B = c A allora det B = c^n det A

$$\det B = \sum_{p\in\sigma_n} \varepsilon(p)\cdot b_{1,p(1)}\cdot\ldots\cdot b_{i,p(i)}\cdot\ldots\cdot b_{n,p(n)}$$

$$= \sum_{p\in\sigma_n} \varepsilon(p)\cdot c\cdot a_{1,p(1)}\cdot\ldots\cdot c\cdot a_{i,p(i)}\cdot\ldots\cdot c\cdot a_{n,p(n)}$$

$$= c\cdot\ldots\cdot c\sum_{p\in\sigma_n} \varepsilon(p)\cdot a_{1,p(1)}\cdot\ldots\cdot a_{i,p(i)}\cdot\ldots\cdot a_{n,p(n)}$$

$$= c^n\cdot\det A$$

Proprietà del determinante

- Se una riga di *A* è somma di due vettori allora det *A* è la somma dei determinanti di due matrici che hanno ciascuno dei due vettori come riga.

$$A = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$\det A = \sum_{p \in \sigma_n} \varepsilon(p) \cdot a_{1,p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i,p(i)} \cdot \ldots \cdot a_{n,p(n)}$$

$$\det A = \sum_{p \in \sigma_n} \varepsilon(p) \cdot (v_{1,p(1)} + v_{2,p(1)}) \cdot \ldots \cdot a_{n,p(n)}$$

$$= \sum_{p \in \sigma_n} \varepsilon(p) \cdot v_{1,p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,p(n)}$$

$$+ \sum_{p \in \sigma_n} \varepsilon(p) \cdot v_{2,p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,p(n)}$$

Proprietà del determinante

- Se una riga di A è somma di due vettori allora det A è la somma dei determinanti di due matrici che hanno ciascuno dei due vettori come riga.
- Se una riga di A è combinazione lineare di due righe allora det A = 0

$$A = \begin{pmatrix} cR_i + dR_j \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} \qquad \det A = c \det \begin{pmatrix} R_i \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + d \det \begin{pmatrix} R_j \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} = 0$$

Proprietà del determinante

- Se una riga di A è somma di due vettori allora det A è la somma dei determinanti di due matrici che hanno ciascuno dei due vettori come riga.
- Se una riga di A è combinazione lineare di due righe allora det $A = 0$
- $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$

Cofattore o complemento algebrico

Si dice cofattore o complemento algebrico di un elemento $a_{i,j}$ di una matrice quadrata:

$$cof\,(a_{i,j}) = (-1)^{i+j}\det A_{i,j}$$

La matrice che ha come elementi tutti i cofattori degli elementi di A si indica con $cof(A)$.

E' definita come: $cof\,(A)_{i,j} = cof\,(a_{i,j})$

Determinare la matrice dei cofattori delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Regola di Laplace per il calcolo del determinante

Il determinante di una matrice quadrata di ordine n, calcolato secondo la riga i, è:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot \det A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot cof(a_{i,j})$$

Il determinante di una matrice quadrata di ordine n, calcolato secondo la colonna j, è:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot \det A_{i,j}$$

La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i cofattori degli elementi di un'altra riga (o colonna) è 0.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot cof(a_{r,j}) = 0$$

E' l'espressione del determinante di una matrice B che ha la riga i uguale alla riga r, cioè due righe uguali.

Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Uso del determinante per il calcolo del prodotto vettoriale

$$A=\begin{pmatrix} \underline{i} & \cancel{\underline{j}} & \cancel{\underline{k}} \\ \cancel{v_1} & v_2 & v_3 \\ \cancel{w_1} & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{1,1}\left[a_{2,2}\cdot a_{3,3}-a_{2,3}\cdot a_{3,2}\right] \;=\underline{i}\left[v_2\cdot w_3-v_3\cdot w_2\right]$$

$$-a_{1,2}\left[a_{2,1}\cdot a_{3,3}-a_{2,3}\cdot a_{3,1}\right]$$

$$+a_{1,3}\left[a_{2,1}\cdot a_{3,2}-a_{2,2}\cdot a_{3,1}\right]$$

Uso del determinante per il calcolo del prodotto vettoriale

$$A = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{1,1}\left[a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,2}\right] \quad = \underline{i}\left[v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2\right]$$

$$-a_{1,2}\left[a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,1}\right] \qquad -\underline{j}\left[v_1 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_1\right]$$

$$+a_{1,3}\left[a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{2,2} \cdot a_{3,1}\right]$$

Uso del determinante per il calcolo del prodotto vettoriale

$$A = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

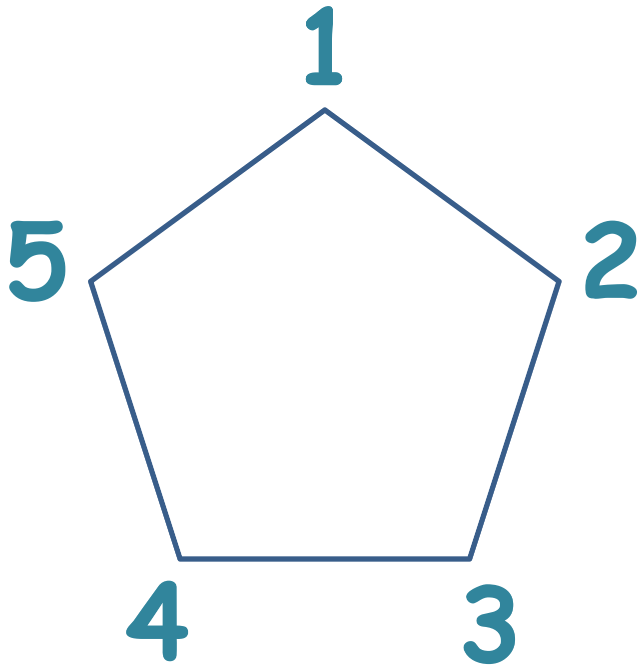
$$\det A = a_{1,1}\left[a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,2}\right] = \underline{i}\left[v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2\right]$$

$$-a_{1,2}\left[a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,1}\right] \qquad -\underline{j}\left[v_1 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_1\right]$$

$$+a_{1,3}\left[a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{2,2} \cdot a_{3,1}\right] \qquad +\underline{k}\left[v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1\right]$$

$$= \underline{v} \times \underline{w}$$

Uso del determinante per il calcolo dell'energia di delocalizzazione



$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+2)(x^2-x-1)^2 = 0$$

Matrice inversa

Indichiamo con A^{-1} la matrice inversa di A.

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det A \cdot A^{-1} = \det I = 1$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$$\boxed{\det A \neq 0}$$

Condizione necessaria per l'invertibilità

Matrice inversa

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$$\boxed{\det A \neq 0}$$

Condizione necessaria per l'invertibilità

Se $\det A=0$ la matrice è detta singolare.

Le matrici singolari non sono invertibili.

Matrice inversa

Indichiamo con A^{-1} la matrice inversa di A.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{cof(A)^T}{\det A} \cdot A$$

$$I = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{k=1}^{n} cof(A)_{k,i} \cdot a_{k,j} = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$$

Determinare la matrice inversa delle seguenti matrici e verificare il risultato ottenuto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Rango di una matrice

Sia $A \in M_{n \times m}$

Il rango (o caratteristica) di una matrice A è il massimo numero di righe e di colonne linearmente indipendenti di A.

$r(A) \in N$ $\qquad$ $r(A) \leq \min(n,m)$

La matrice nulla ha rango 0

Rango di una matrice

Sia $A \in M_{n \times m}$

Un minore di ordine p di A è il determinante di una sottomatrice quadrata di ordine p estratta da A.

$1 \leq p \leq \min(n,m)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det B = -10$$

Rango di una matrice

Sia $A \in M_{n \times m}$

Il rango (o caratteristica) di una matrice A è il massimo ordine dei minori non tutti nulli di A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Uso del rango per lo studio della dipendenza lineare di vettori

Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \dots \underline{v}_m \in R_n$

$$A = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \dots \\ \underline{v}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & \dots & \dots & v_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m,1} & v_{m,2} & \dots & v_{m,n} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$$

$n < m$

$r(A) \leq \min(n,m) < m$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2 \dots \underline{v}_m$ sono linearmente dipendenti

Uso del rango per lo studio della dipendenza lineare di vettori

Siano $\underline{v}_1 , \underline{v}_2 \dots \underline{v}_m \in R_n$ $\quad n < m$

Se il numero di vettori è superiore alla dimensione dello spazio cui appartengono allora $\underline{v}_1 , \underline{v}_2 \dots \underline{v}_m$ sono linearmente dipendenti.

Uso del rango per lo studio della dipendenza lineare di vettori

Siano $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ ... $\underline{v}_m \in R_n$ $m < n$

$$A = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \dots \\ \underline{v}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & \dots & \dots & v_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m,1} & v_{m,2} & \dots & v_{m,n} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$$

Il rango di una matrice A è il massimo numero di righe (e colonne) linearmente indipendenti di A.

Se $r(A) = m$ $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ ... $\underline{v}_m$ sono linearmente indipendenti

Se $r(A) < m$ $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ ... $\underline{v}_m$ sono linearmente dipendenti

Uso del rango per lo studio della dipendenza lineare di vettori

Siano $\underline{v}_1 = (1,1)$, $\underline{v}_2 = (1,-1)$, $\underline{v}_3 = (2,1)$. Stabilire se i 3 vettori sono linearmente indipendenti.

Siano $\underline{v}_1 = (1,1,1)$, $\underline{v}_2 = (1,-1,1)$, $\underline{v}_3 = (1,0,1)$. Stabilire se i 3 vettori sono linearmente indipendenti.

Stabilire se $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti.

Trasformazioni lineari

Una trasformazioni lineare è una funzione F tra due spazi vettoriali che soddisfa le proprietà di linearità:

1. $F(\underline{x}+\underline{y}) = F(\underline{x})+F(\underline{y})$
2. $F(a\underline{x}) = aF(\underline{x})$

Esempi:

- Rotazione
- Simmetrie (Riflessione)
- Omotetie (Dilatazioni)
- L'operazione di coniugio in C

Matrici come trasformazioni lineari

Per le loro proprietà di linearità le matrici possono essere usate per rappresentare trasformazioni lineari tra spazi vettoriali.

Matrici come trasformazioni lineari

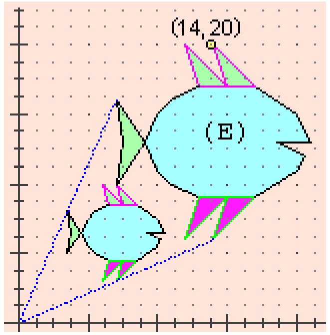
Sia F una trasformazione lineare da R^n in R^n essa può essere rappresentata da una matrice nxn.

Esempio:

Sia F: $R^2 \rightarrow R^2$ una dilatazione

$(a,b) \rightarrow k(a,b)=$

(ka,kb)



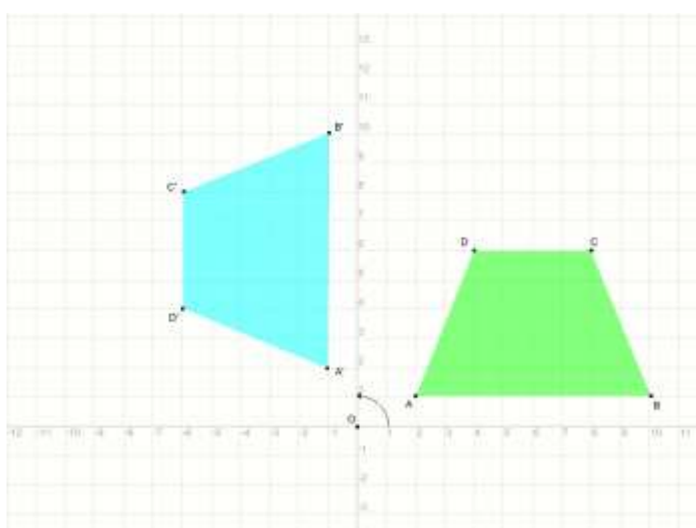
$$F(a,b)=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$$

Matrici come trasformazioni lineari

Esempi:

- Rotazione

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

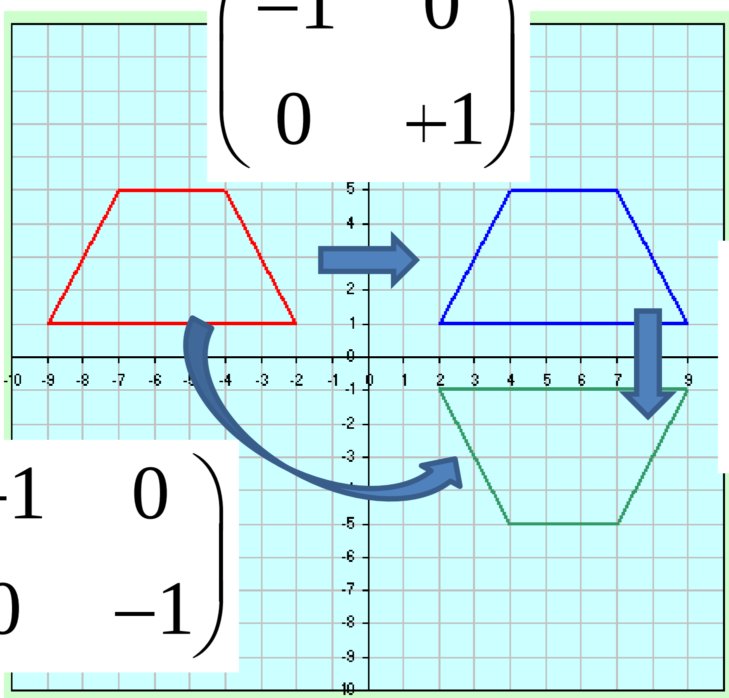


Matrici come trasformazioni lineari

Esempi:

- Riflessione

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrici come trasformazioni lineari

Esempi:

- L'operazione di coniugio in C $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Matrici come trasformazioni lineari

Esempi:

- Consideriamo la matrice singolare $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Applichiamola ai vettori

(3,2)	ottenendo	(5, 10)	Hanno la stessa direzione
(1,-2)		(-1,-2)	

Matrici come trasformazioni lineari

Esempi:

- Consideriamo la matrice singolare $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Osserviamo che corrisponde ad una trasformazione che porta ogni vettore su una stessa retta.

Sarà quindi impossibile risalire a quale vettore ha originato un certo punto della retta. Infatti la trasformazione (matrice) non è invertibile.

Matrici come trasformazioni lineari

Esempi:

- Consideriamo la matrice singolare $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Applichiamola ai versori

(1,0)		(1, 0)	Hanno la stessa direzione di quelli di partenza
	ottenendo		
(0,1)		(0,2)	
(1,3)		(1,6)	Cambia direzione

Matrici come trasformazioni lineari

Esempi:

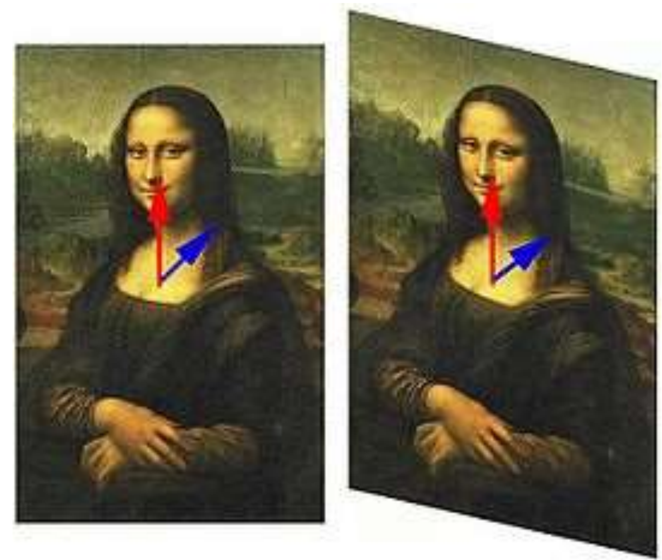
- Consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Osserviamo che corrisponde ad una trasformazione che lascia invariata la direzione di alcuni vettori (i versori) ma non di tutti.

Autovettori di una matrice

Un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ si dice autovettore della trasformazione lineare rappresentata dalla matrice A se $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$

Un autovettore è un vettore che viene trasformato in un suo multiplo, quindi mantiene la sua direzione.



Lo scalare λ è detto autovalore dell' autovettore $\underline{v}$.

Autovalori di una matrice

Un autovalore λ di A soddisfa la relazione

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v}$$

$$A\underline{v} - \lambda\underline{v} = \underline{0}$$

$$(A - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$$

è un sistema omogeneo che ha solo la soluzione banale se $\det(A - \lambda I) \neq 0$.

Altre soluzioni ci sono se $\det(A - \lambda I) = 0$

Autovalori di una matrice

Gli autovalori λ di una matrice quadrata A_{nxn} si determinano risolvendo l'equazione

$$\det(A - \lambda I) = 0 \longleftarrow$$

Equazione algebrica di grado n

polinomio caratteristico

Autovalori di una matrice

Determinare gli autovalori delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -15 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Autovettori di una matrice

Dopo aver determinato gli autovalori si determinano gli autovettori corrispondenti usando la definizione $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$.

$$(A - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$$

Poichè ora λ è noto si ha un sistema omogeneo nella variabile $\underline{v}$, la cui soluzione è l'autovettore corrispondente a λ.

Autovettori di una matrice

Determinare gli autovettori delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -15 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Autovettori di una matrice

Date le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolarne gli autovalori e gli autovettori.