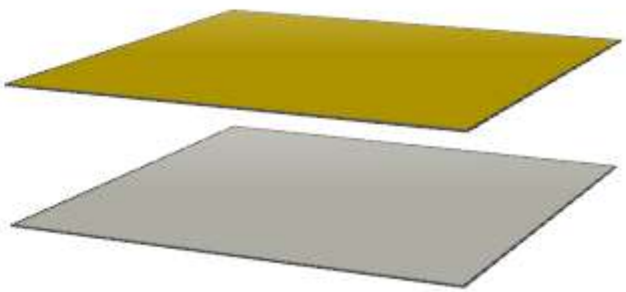
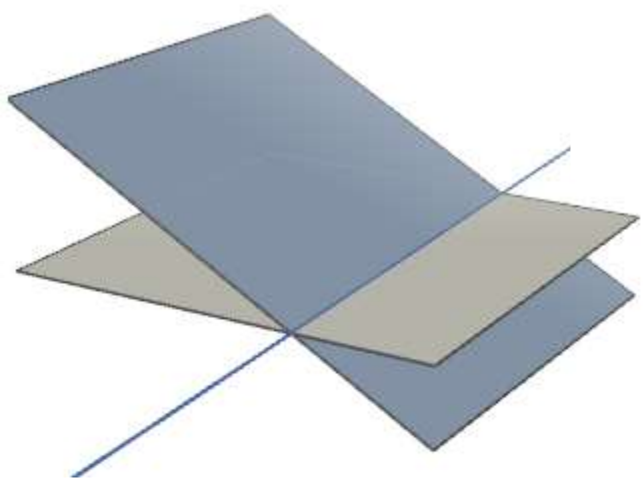
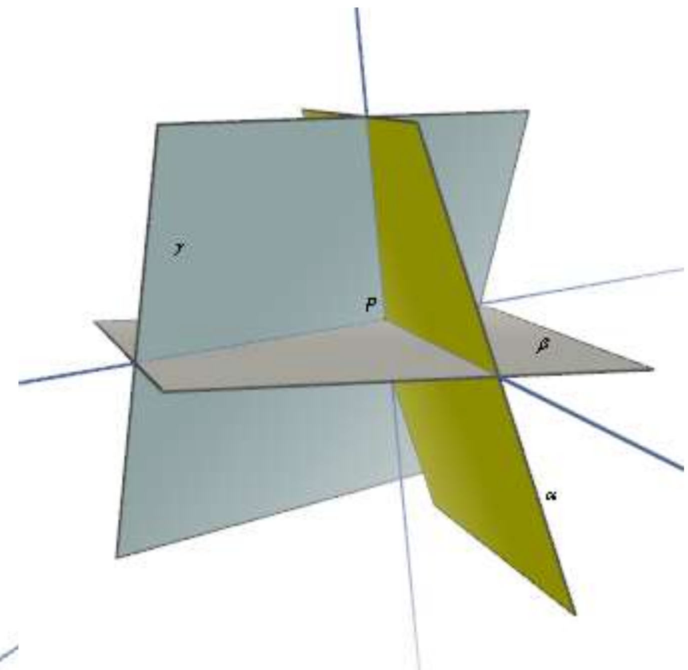
I sistemi lineari







Sistemi lineari

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite è un sistema di m equazioni di primo grado nelle variabili x_1, x_2 … x_n.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

$\forall$ i=0, … m $\wedge$ $\forall$ j=0, … n, $a_{i,j} \in R \wedge b_{i,} \in R$

Sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A \times \underline{x} = \underline{b}$$

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & \ldots & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A \times \underline{x} = \underline{b}$$

$$A^*_{m\times(n+1)} = A_{m\times n}\left|\underline{b}\right. = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & \ldots & \ldots & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & \ldots & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

Matrice orlata

Sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Una soluzione del sistema è una n-upla $(X_1, X_2 \ldots X_n)$ che soddisfa contemporaneamente tutte le equazioni.

Il sistema si dice compatibile se ammette almeno una soluzione, incompatibile in caso contrario (nessuna soluzione).

Sistemi lineari

Un sistema lineare di n equazioni in m incognite si dice omogeneo se tutti i termini noti sono 0.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

$$A \times \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{b} = \underline{0}$$

Ha sicuramente la soluzione banale $\underline{x} = \underline{0}$, quindi è sempre compatibile.

Sistemi lineari

Un sistema lineare si dice quadrato se è composto da n equazioni in n incognite.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A \times \underline{x} = \underline{b}$$

$$A \in M_{n \times n}$$

Teorema di Cramer

Dato un sistema lineare quadrato $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$, se $\det A \neq 0$ il sistema ammette una sola soluzione.

Hp: $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$, A quadrata

$\det A \neq 0 \quad \Rightarrow$ A è invertibile

$A^{-1} \cdot A \cdot \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$$\underline{x} = \frac{cof(A)^T}{\det A} \cdot \underline{b}$$

$$\boxed{x_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} cof(a_{j,i}) \cdot b_j}{\det A}}$$

Teorema di Cramer

Dato un sistema lineare quadrato $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$, se $\det A \neq 0$ il sistema ammette una sola soluzione.

Se il sistema è omogeneo, quindi $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$, e $\det A \neq 0$ allora il sistema ammette solo la soluzione banale.

Discutere e risolvere i seguenti sistemi lineari usando il teorema di Cramer.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 4x + 6y = -2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Teorema di Rouché-Capelli

Dato un sistema lineare $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ di m equazioni in n incognite.

Il sistema è compatibile se e solo se $r(A)=r(A|\underline{b})=r$. In questo caso il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni. Se $n=r$ allora la soluzione è unica.

Se $r(A) \neq r(A|\underline{b})$ allora il sistema non ammette soluzioni.

Teorema di Rouché-Capelli

Se $r(A)=r(A|\underline{b})$ allora il sistema è compatibile.

Sia $\underline{x}$ una soluzione del sistema.

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ \dots \\ \dots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \dots \\ \dots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\underline{b}$ è combinazione lineare delle colonne di A, quindi $r(A)=r(A|\underline{b})$

Teorema di Rouché-Capelli

Se $r(A)=r(A|\underline{b})=r=n$ allora il sistema ammette 1 soluzione.

Se $r = n$ allora $r \leq m$.

Sistema quadrato.
Teorema di Cramer.

Le restanti $m-r$ righe sono lin. dipendenti dalle altre r, quindi eliminabili.

Sistemi lineari a gradini

Un sistema con m equazioni ed n incognite, m≤n, si dice a gradini se ha la forma:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots \qquad\qquad + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{2,2}x_2 + \ldots \qquad\qquad + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{m,m}x_m + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Un sistema a gradini è sempre compatibile.

Sistemi lineari a gradini

m=n

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \qquad\qquad a_{n-1,n}x_{n-1} + a_{n,n}x_n = b_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Un sistema a gradini di n equazioni in n incognite ha una sola soluzione.

Sistemi lineari a gradini

m<n

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots & + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{2,2}x_2 + \dots & + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ & a_{m,m}x_m = b_m - a_{m+1,n}t_{m+1} \dots - a_{m,n}t_n \end{cases}$$

Assegno valori arbitrari t_{m+1}, … t_n alle ultime n-m variabili e ricavo le altre in funzione di queste.

Il sistema avrà ∞^{n-m} soluzioni.

Sistemi lineari a gradini

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ \quad\;\; -2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ \quad\;\; -2y + z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ \quad\;\; -2x_2 + x_3 - 2x_4 \qquad\quad = 4 \\ \qquad\qquad\quad - x_3 + x_4 \qquad\quad = 3 \end{cases}$$

Metodo di eliminazione di Gauss-Jordan

Due sistemi lineari in n incognite si dicono equivalenti se hanno le medesime soluzioni. Essi non devono essere necessariamente composti dalle stesse equazioni e neppure dallo stesso numero di equazioni.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -2y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 6y = 4 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 6y = 4 \\ y = -2 \\ 4x + 7y = 2 \end{cases}$$

Metodo di eliminazione di Gauss-Jordan

Ogni sistema lineare si può trasformare in uno a gradini equivalente effettuando sequenze di tre operazioni elementari:

1. Scambiare due equazioni
2. Moltiplicare un'equazione per un numero $c \neq 0$
3. Sostituire un'equazione con quella ottenuta sommando ad essa n multiplo di un'altra.

Metodo di eliminazione di Gauss-Jordan

Sostituire un'equazione con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n + c(a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \ldots + a_{j,n}x_n) = b_i + cb_j \\ \ldots \\ a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \ldots + a_{j,n}x_n = b_j \\ \ldots. \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Metodo di eliminazione di Gauss-Jordan

Le operazioni elementari sono invertibili.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n + \cancel{c}\, b_j \qquad = b_i + c\cancel{b}_j \\ \ldots \\ a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \ldots + a_{j,n}x_n = b_j \\ \ldots. \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Metodo di eliminazione di Gauss-Jordan

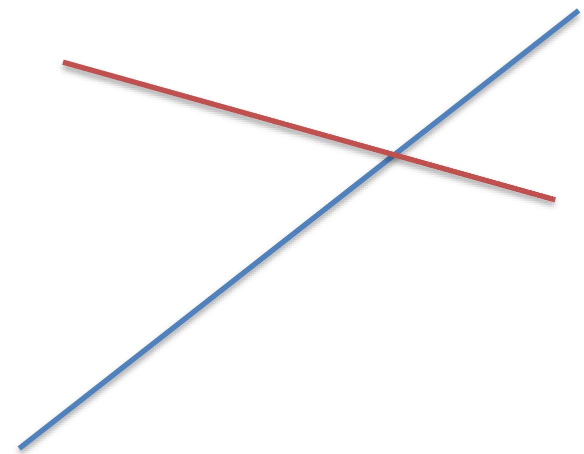
$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+y+4z=2 \\ 3x-3y+z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$$

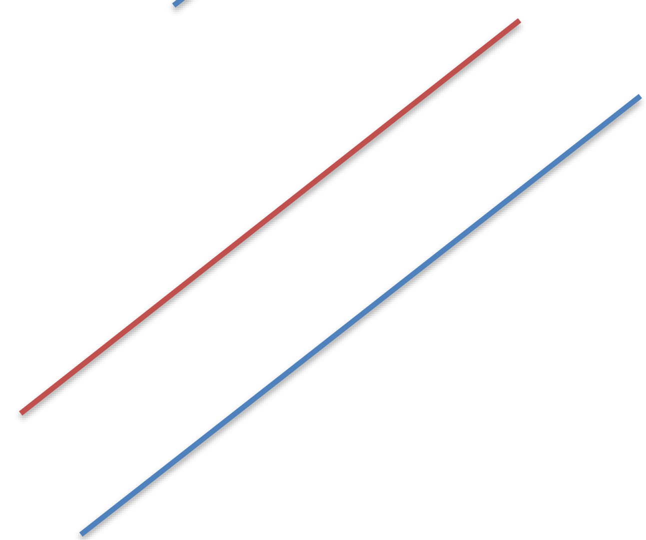
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x+2z=3 \\ x-2y=1 \end{cases}$$

Interpretazione geometrica dei sistemi lineari in 2 incognite

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

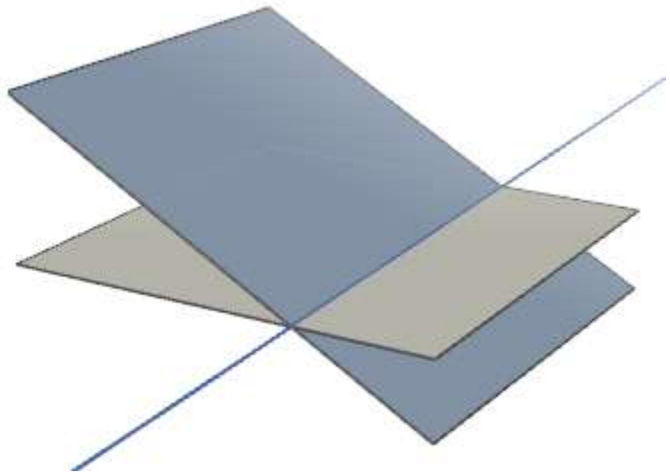


$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

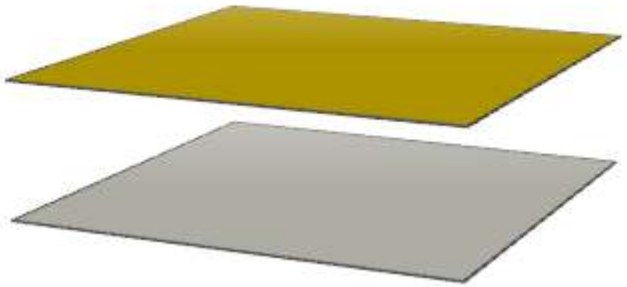


Interpretazione geometrica dei sistemi lineari in 3 incognite

$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

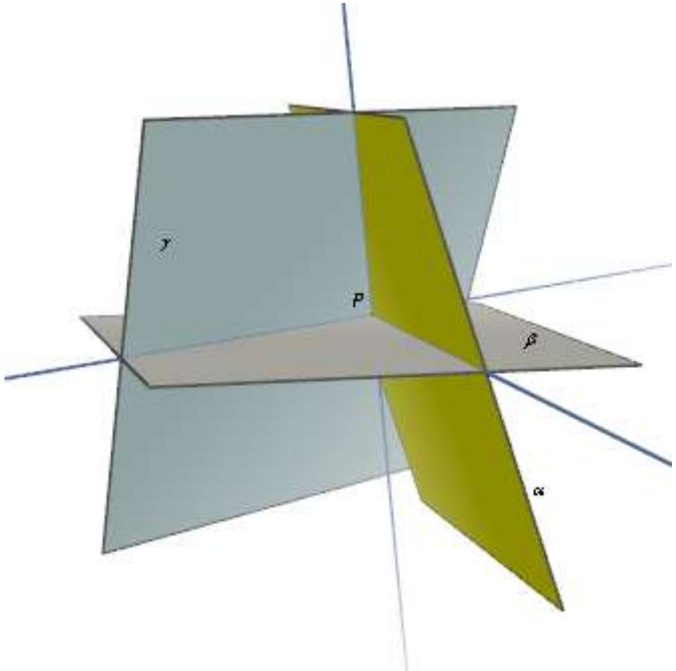


$$\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$



Interpretazione geometrica dei sistemi lineari in 3 incognite

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + 2y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$



Sistemi con parametro

Sono sistemi lineari in cui una o più variabili non assumono il ruolo di incognite ma di parametri.

Si vuole capire per quali valori dei parametri il sistema è compatibile e quante soluzioni ammette

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + 2y + kz = 0 \\ x - ky + z = 2 \end{cases}$$

Sistemi con parametro

Stabilire per quali valori del parametro il sistema ha un'unica soluzione. Cosa accade negli altri casi?

$$\begin{cases} 2kx + 3y = 1 \\ 3kx - 2ky = 2 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 2k & 3 \\ 3k & -2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A = \begin{pmatrix} 2k & 3 \\ 3k & -2k \end{pmatrix}$; $\quad$ det A=$\begin{vmatrix} 2k & 3 \\ 3k & -2k \end{vmatrix} = -4k^2 - 9k$

- Quando $-4k^2 - 9k \neq 0$, cioè quando $k \neq 0$ e $k \neq -\frac{9}{4}$ il sistema ha un'unica soluzione.

Sistemi con parametro

- Quando $k = 0$ il sistema diventa $\begin{cases} 3y = 1 \\ 0 = 2 \end{cases}$ che è impossibile e non ha nessuna soluzione.

- Quando $k = -\frac{9}{4}$ il sistema diventa $\begin{cases} -\frac{9}{2}x + 3y = 1 \\ -\frac{27}{4}x + \frac{9}{2}y = 2 \end{cases}$ da cui, applicando il metodo di sostituzione $\begin{cases} y = \left(1 + \frac{9}{2}x\right) \cdot \frac{1}{3} \\ -\frac{27}{4}x + \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}x\right) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \left(1 + \frac{9}{2}x\right) \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} = 2 \end{cases}$ e quindi impossibile.

Sistemi con parametro

$$\begin{cases} x + ky = -1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + ky + z = -1 \\ x + 2y + kz = 0 \\ 2x + 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + ky = -1 \\ x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$