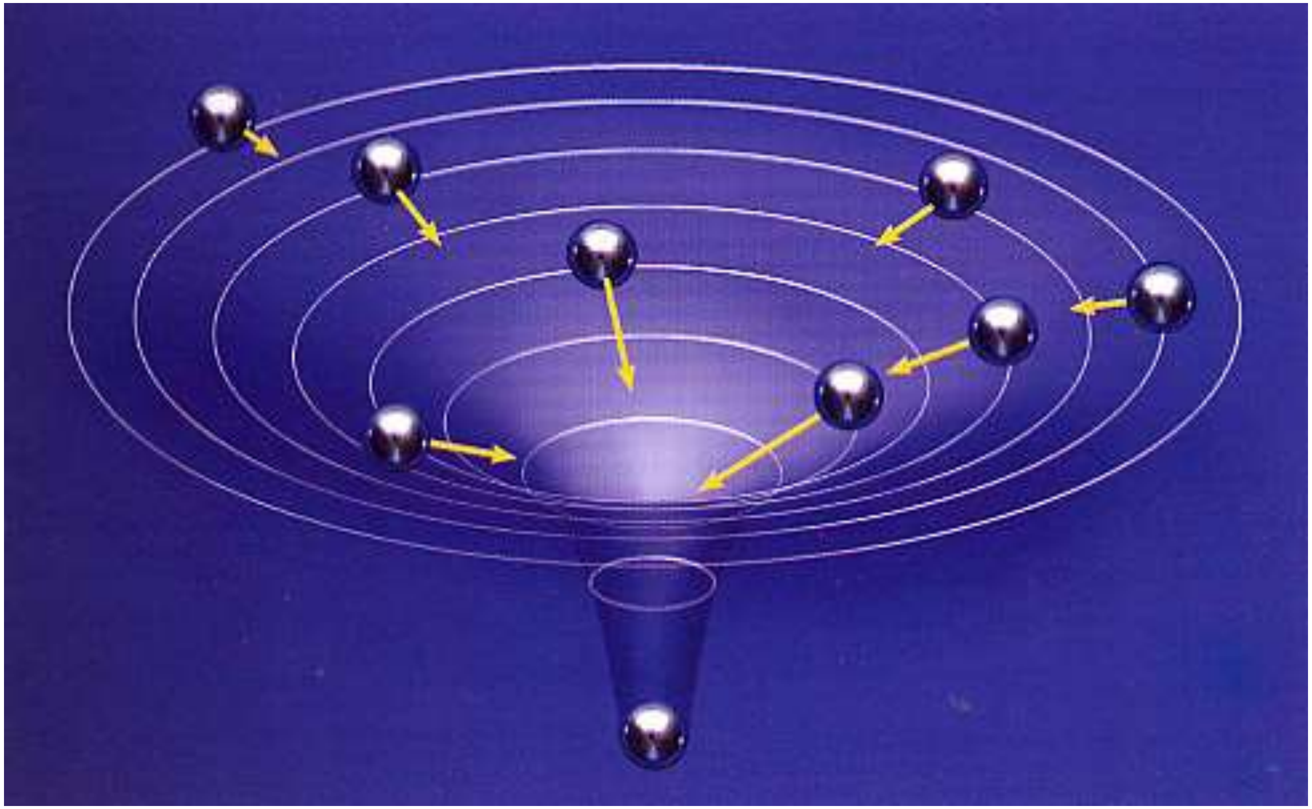
I vettori



Gli scalari

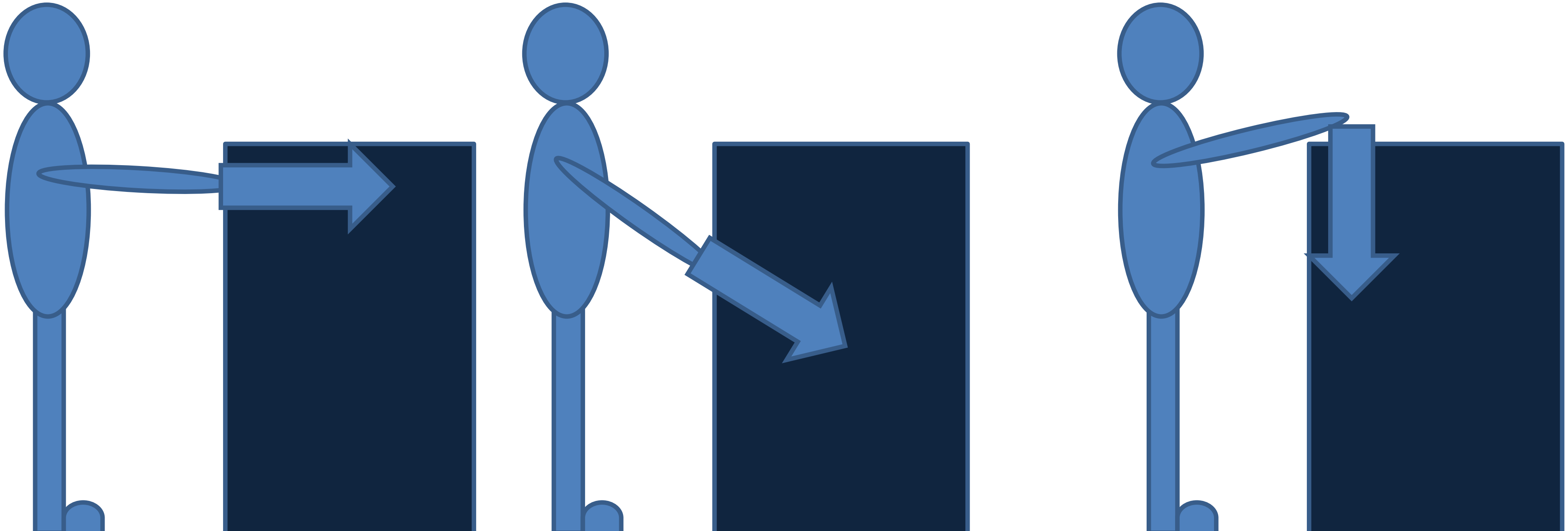
Le grandezze **scalari** sono quelle grandezze ben descritte da un <u>numero puro.</u>

Distanza tra due punti

Temperatura

Densità

I vettori

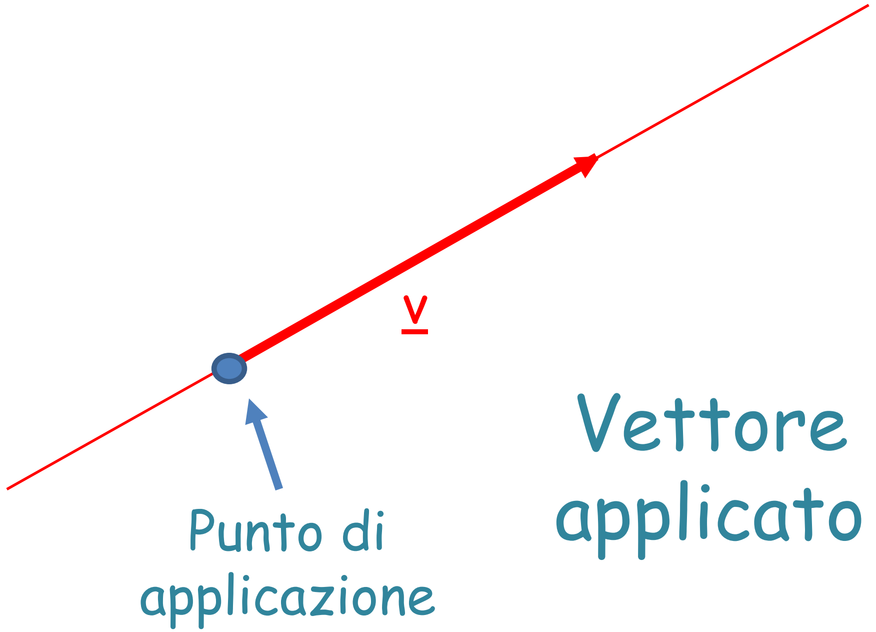


I vettori

I vettori sono quelle grandezze descritte da:

- Direzione
- Verso
- Modulo

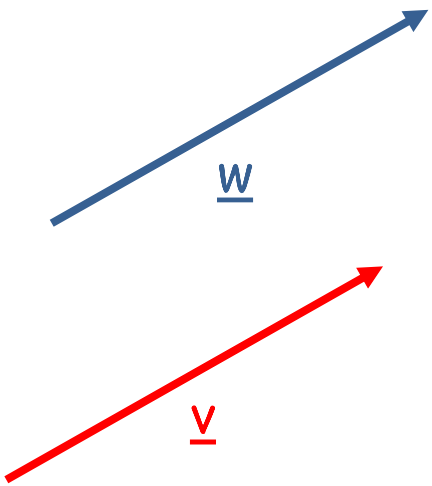
Spostamento
Forza
Velocità

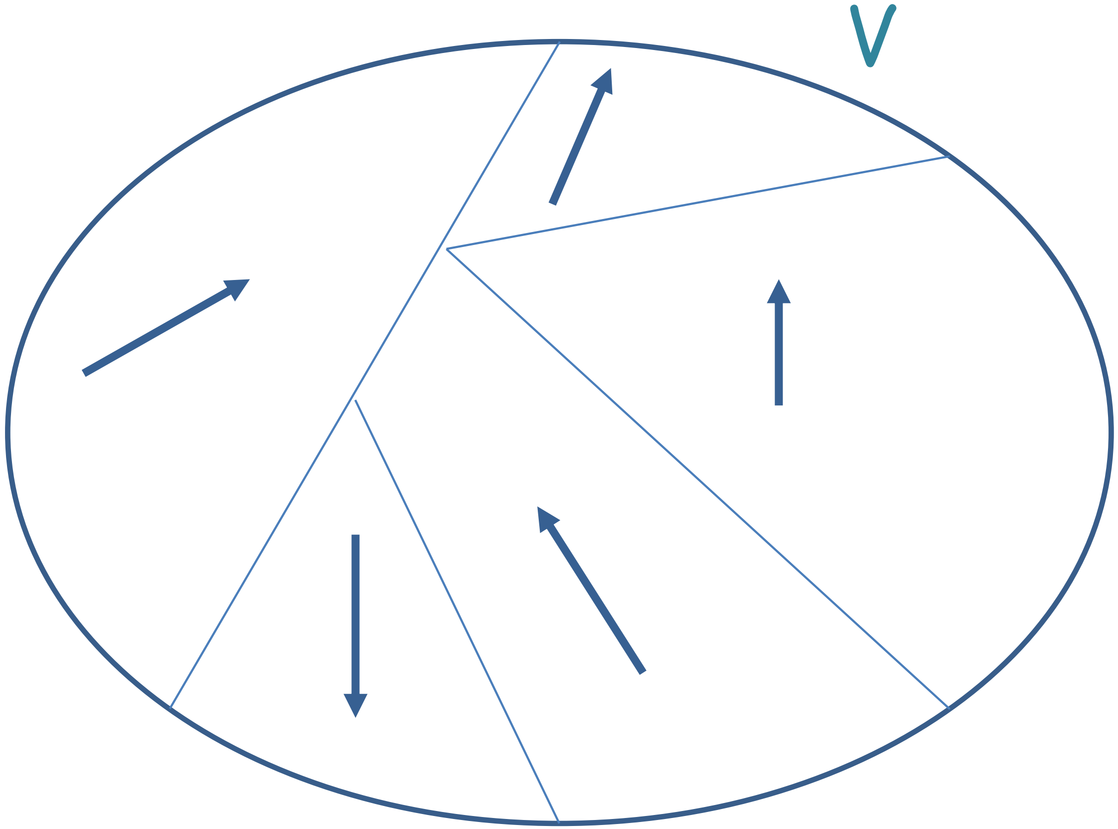


Vettore applicato

Equipollenza tra vettori

I vettori sono le classi di equipollenza di vettori applicati

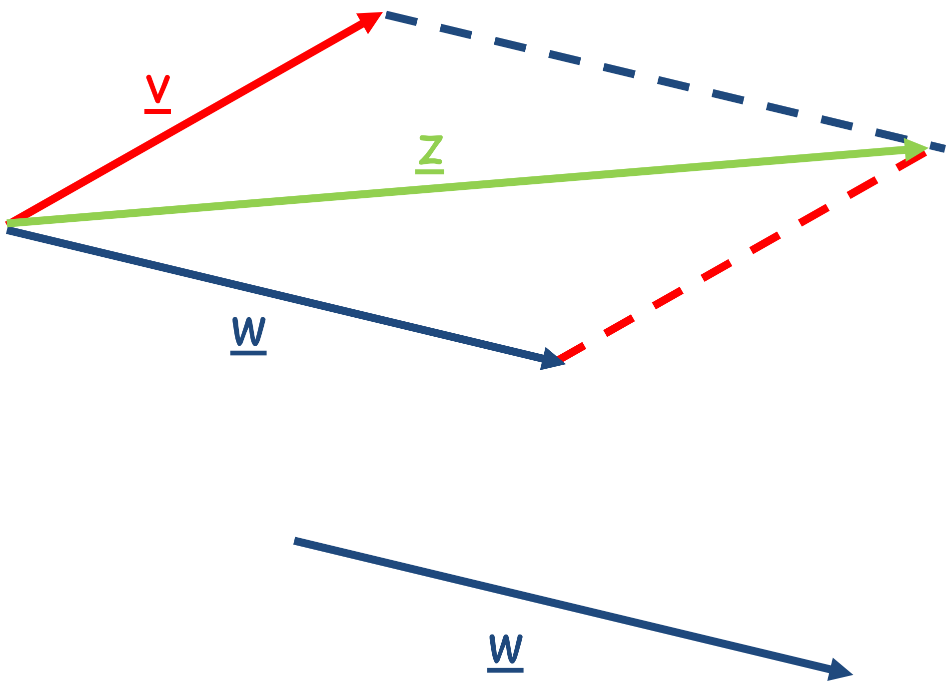




Somma di vettori

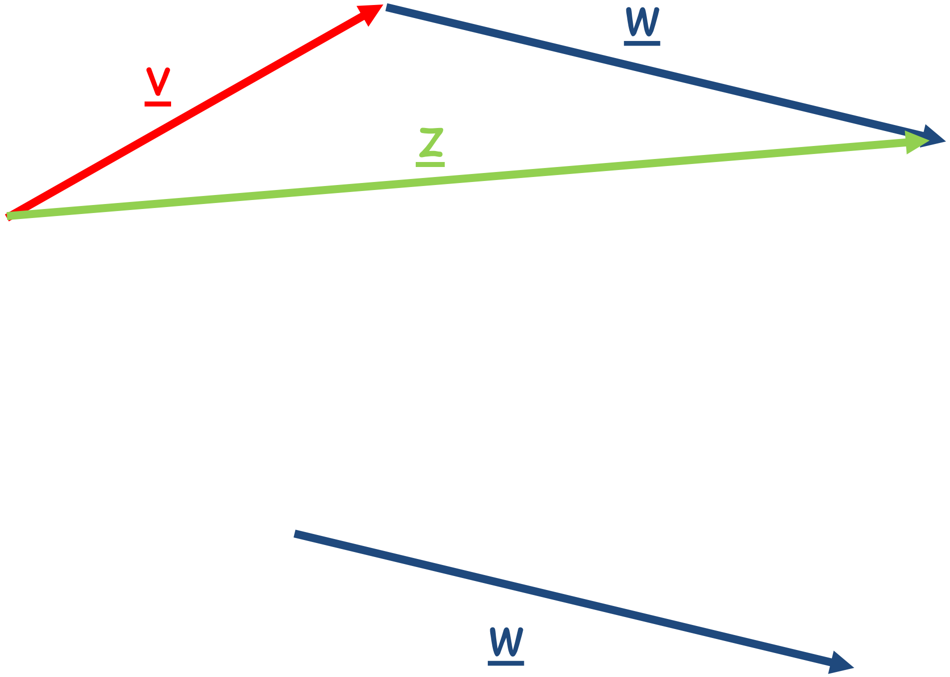
$\underline{v} + \underline{w} = \underline{z}$

Regola del parallelogramma



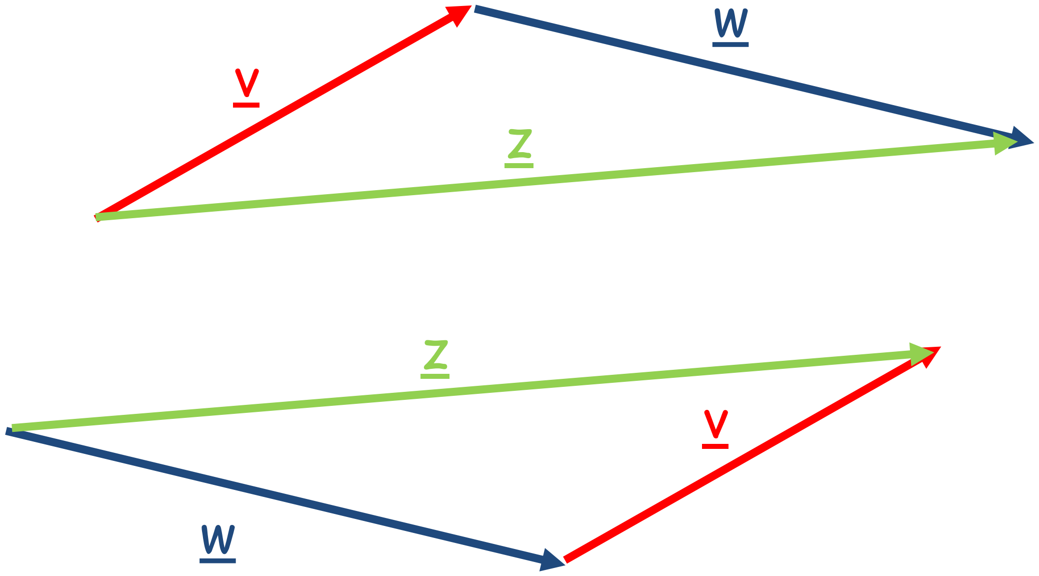
Somma di vettori

$\underline{v} + \underline{w} = \underline{z}$



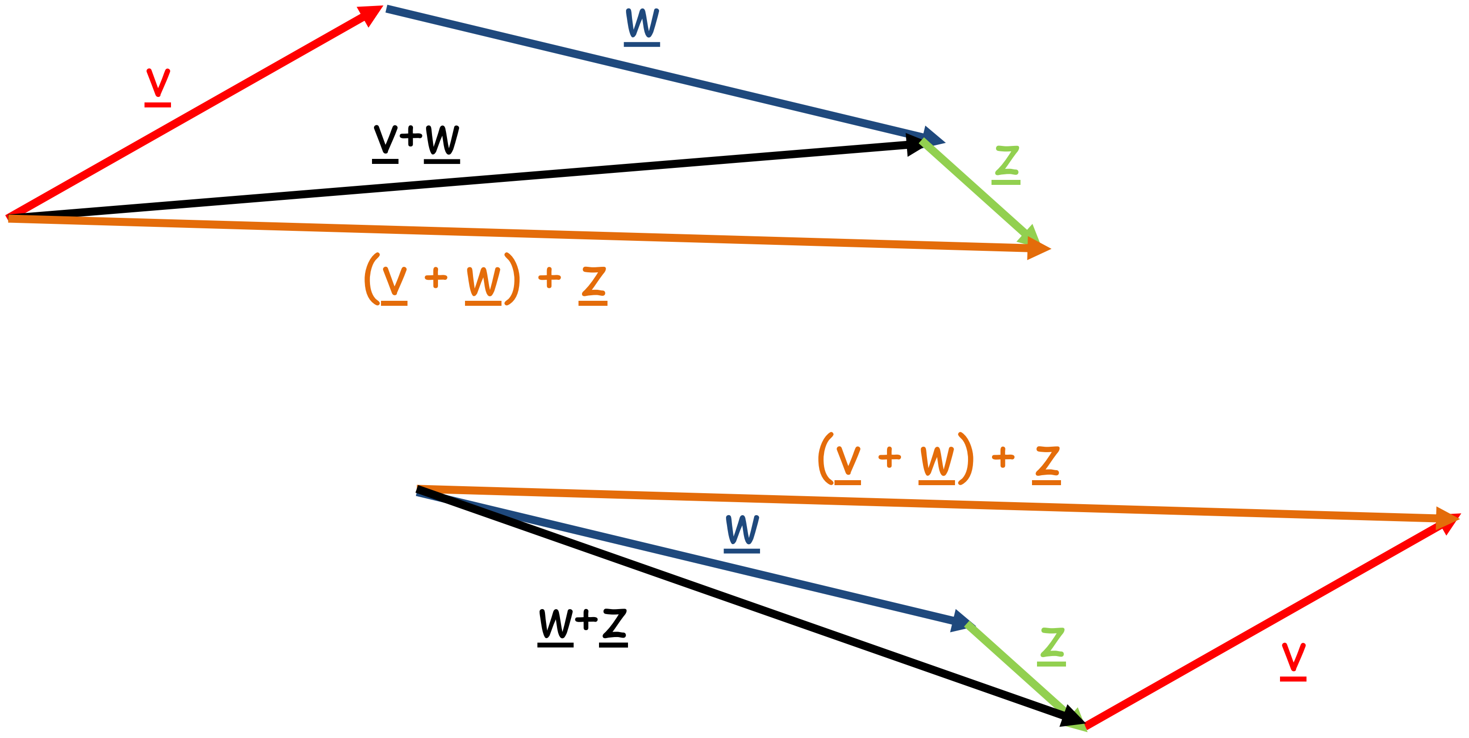
Proprietà della somma di vettori

- Commutativa $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$



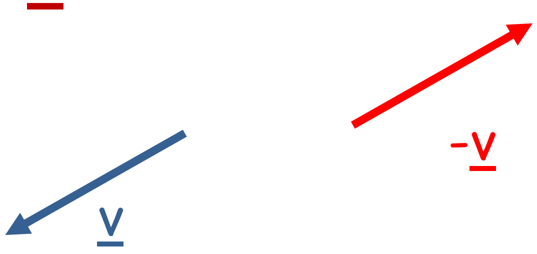
Proprietà della somma di vettori

- Commutativa $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$
- Associativa $(\underline{v} + \underline{w}) + \underline{z} = \underline{v} + (\underline{w} + \underline{z})$



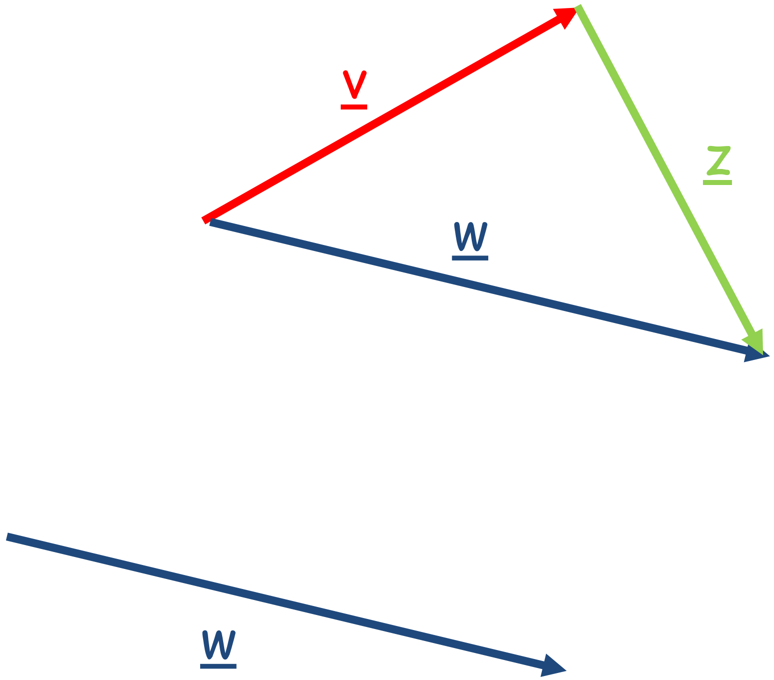
Proprietà della somma di vettori

- Commutativa $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$
- Associativa $(\underline{v} + \underline{w}) + \underline{z} = \underline{v} + (\underline{w} + \underline{z})$
- Esistenza dell'elemento neutro $\underline{0}$
  - Vettore modulo 0
  - Tutte le direzioni
  - Entrambe i versi
- Esistenza dell'opposto $\underline{v} \rightarrow -\underline{v}$
  - Stessa direzione
  - Stesso modulo
  - Verso opposto



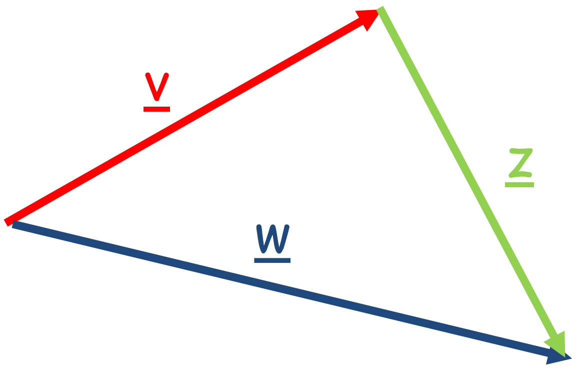
Sottrazione tra vettori

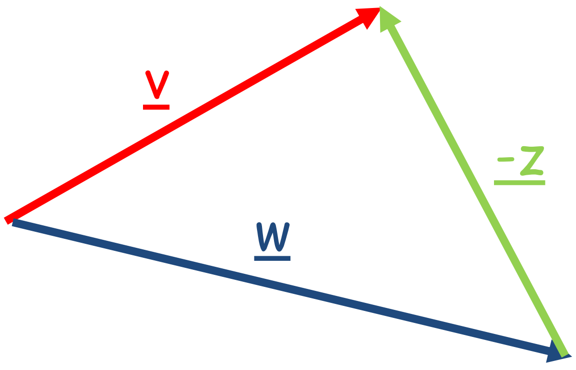
$\underline{v} - \underline{w} = \underline{z}$



Proprietà della differenza di vettori

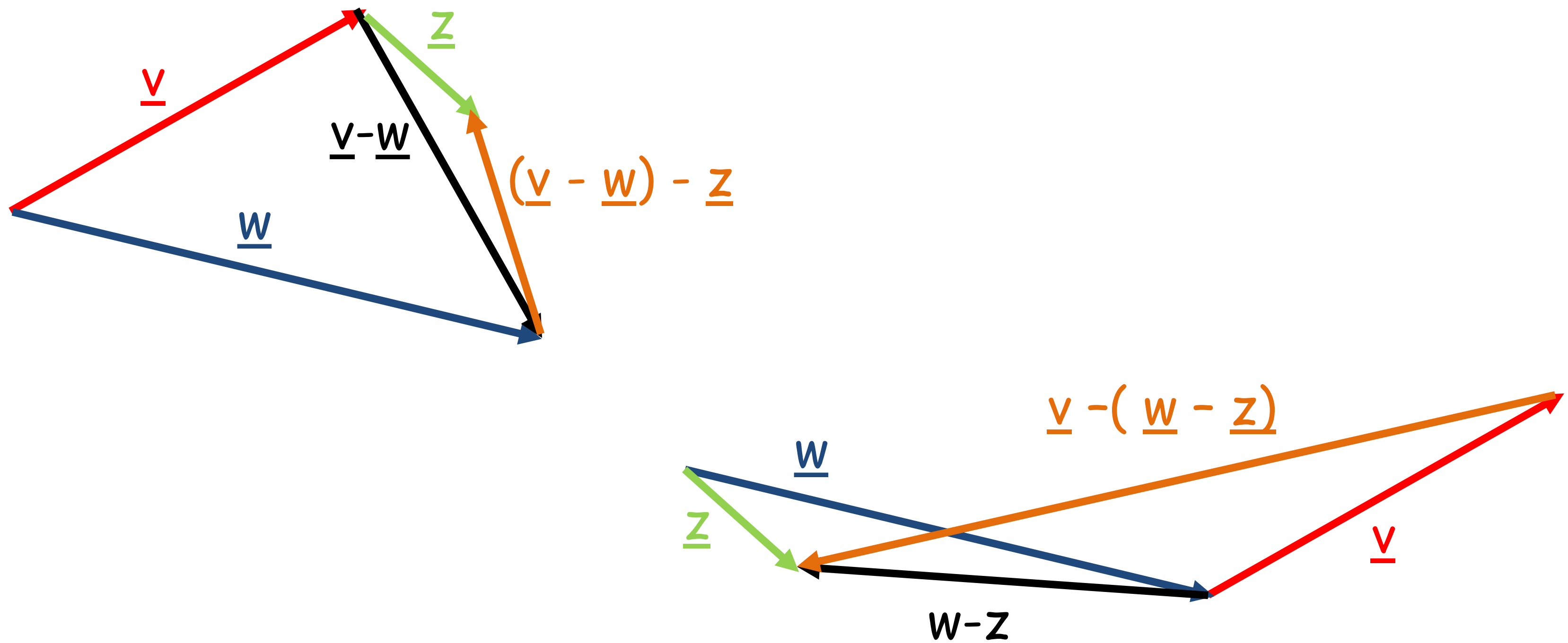
• ~~Commutativa~~ $\underline{v} - \underline{w} \neq \underline{w} - \underline{v}$





Proprietà della differenza di vettori

- ~~Commutativa~~
- ~~Associativa~~ $(\underline{v} - \underline{w}) - \underline{z} \neq \underline{v} - (\underline{w} - \underline{z})$



Proprietà della differenza di vettori

- ~~Commutativa~~
- ~~Associativa~~
- Esistenza dell'elemento neutro $\underline{v} - \underline{0} = \underline{v}$

$\underline{0} - \underline{v} = -\underline{v}$

Prodotto di uno scalare per un vettore o prodotto esterno

$a\underline{v} = \underline{w}$ $\qquad a \in R$

- Stessa direzione
- Verso
  - $a<0$ verso opposto
  - $a>0$ stesso verso
  - $a=0$ vettore nullo
- Modulo $|\underline{w}| = |a| \cdot |\underline{v}|$

Proprietà del prodotto esterno

- Commutativa per gli scalari $ab\underline{v} = ba\underline{v}$
- Associativa $a(b\underline{v}) = (ab)\underline{v}$
- Esistenza dell'elemento neutro $a=1$ $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$
- Distributiva $(a + b)\underline{v} = a\underline{v} + b\underline{v}$

  $a(\underline{v} + \underline{w}) = a\underline{v} + a\underline{w}$

- $-1\ \underline{v} = -\underline{v}$
- $0\ \underline{v} = \underline{0}$

Spazio vettoriale

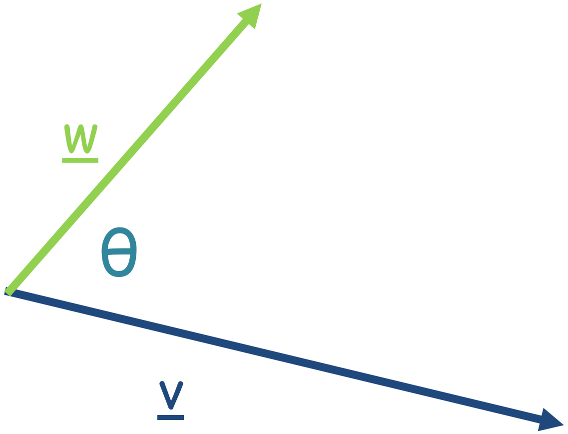
Uno spazio vettoriale su K (nel nostro caso R) è un insieme non vuoto V su cui sono definite le operazioni di somma tra elementi di V e di prodotto di un elemento di K per un elemento di V.

Gli elementi di V si dicono vettori e gli elementi di K si dicono scalari.

Prodotto scalare tra vettori

$$\underline{v} \circ \underline{w} = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = a$$

$$\underline{v} \circ \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cos\theta$$



$$\underline{v} \circ \underline{v} = |\underline{v}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 0 = |\underline{v}|^2 \geq 0$$

Proprietà del prodotto scalare

- Commutativo → Simmetria $\underline{v} \circ \underline{w} = \underline{w} \circ \underline{v}$
- Linearità $(\underline{v} + \underline{w}) \circ \underline{z} = \underline{v} \circ \underline{z} + \underline{w} \circ \underline{z}$

  $k(\underline{v} \circ \underline{w}) = k\underline{v} \circ \underline{w} = \underline{v} \circ k\underline{w}$
- $\underline{v} \circ \underline{w} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{v} = \underline{0} \vee \underline{w} = \underline{0} \vee \underline{v} \perp \underline{w}$

Prodotto vettoriale tra vettori

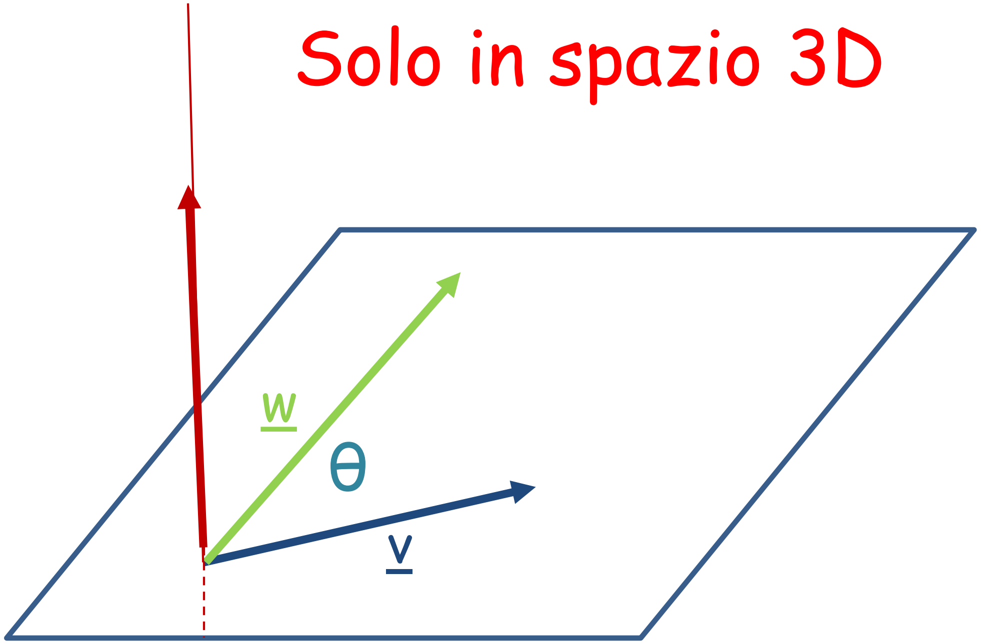
$$\underline{v} \times \underline{w} = \underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{z}$$

Direzione

Solo in spazio 3D

Verso

Modulo



$$|\underline{v} \times \underline{w}| = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \sin\theta$$

Proprietà del prodotto vettoriale

- ~~Commutativo~~ $\underline{v} \times \underline{w} \neq \underline{w} \times \underline{v}$ $\quad \underline{v} \times \underline{w} = -\underline{w} \times \underline{v}$
- Linearità $(\underline{v} + \underline{w}) \times \underline{z} = \underline{v} \times \underline{z} + \underline{w} \times \underline{z}$

$$\underline{v} \times (\underline{w} + \underline{z}) = \underline{v} \times \underline{w} + \underline{v} \times \underline{z}$$

$$k(\underline{v} \times \underline{w}) = k\underline{v} \times \underline{w} = \underline{v} \times k\underline{w}$$

- $\underline{v} \times \underline{w} = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{0} \vee \underline{w} = \underline{0} \vee \underline{v} // \underline{w}$

$$\underline{v} = \underline{w}$$

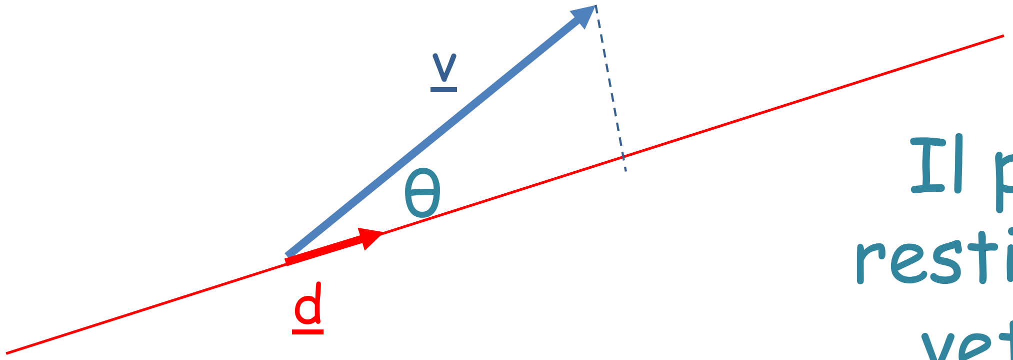
Versori

Un versore è un vettore di modulo 1.

Ad ogni vettore $\underline{v}$ si associa il versore vers($\underline{v}$)= $\dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$

che identifica univocamente la direzione di $\underline{v}$.

$$\underline{v} \circ \underline{d} = |\underline{v}| \cdot |\underline{d}| \cos\theta = |\underline{v}| \cdot \cos\theta$$

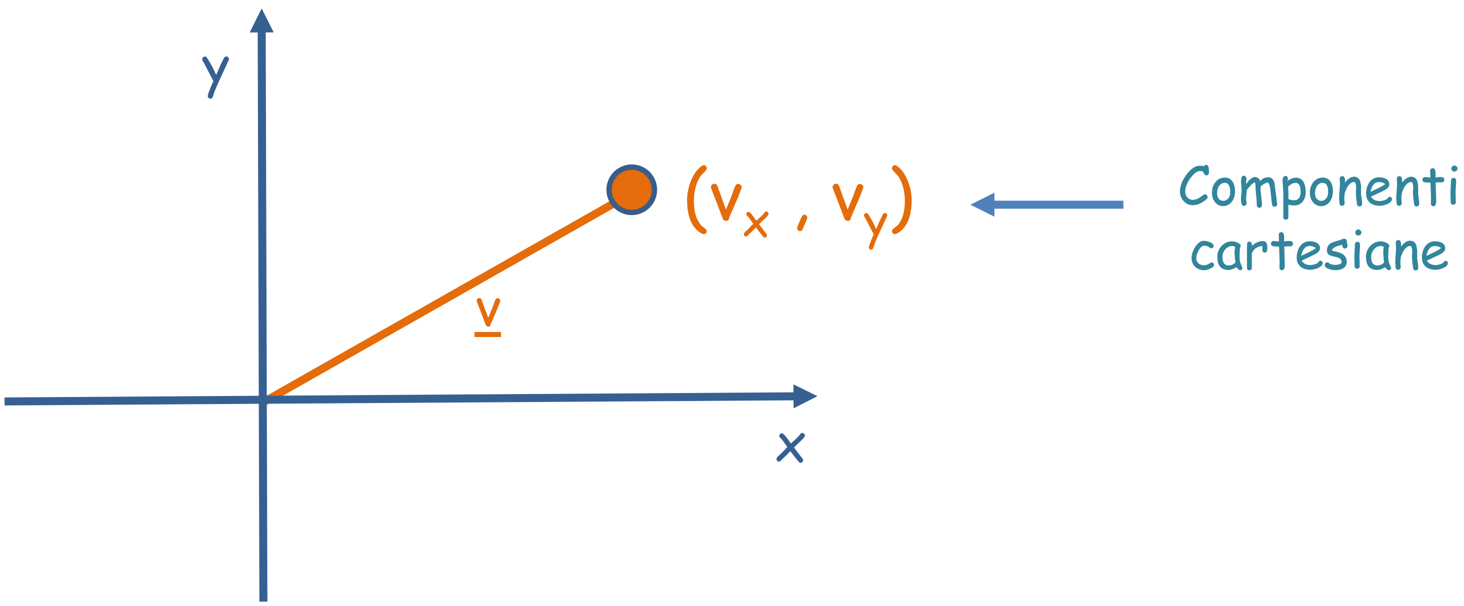


Il prodotto scalare $\underline{v} \circ \underline{d}$ restituisce la proiezione del vettore $\underline{v}$ in direzione $\underline{d}$.

Combinazione lineare

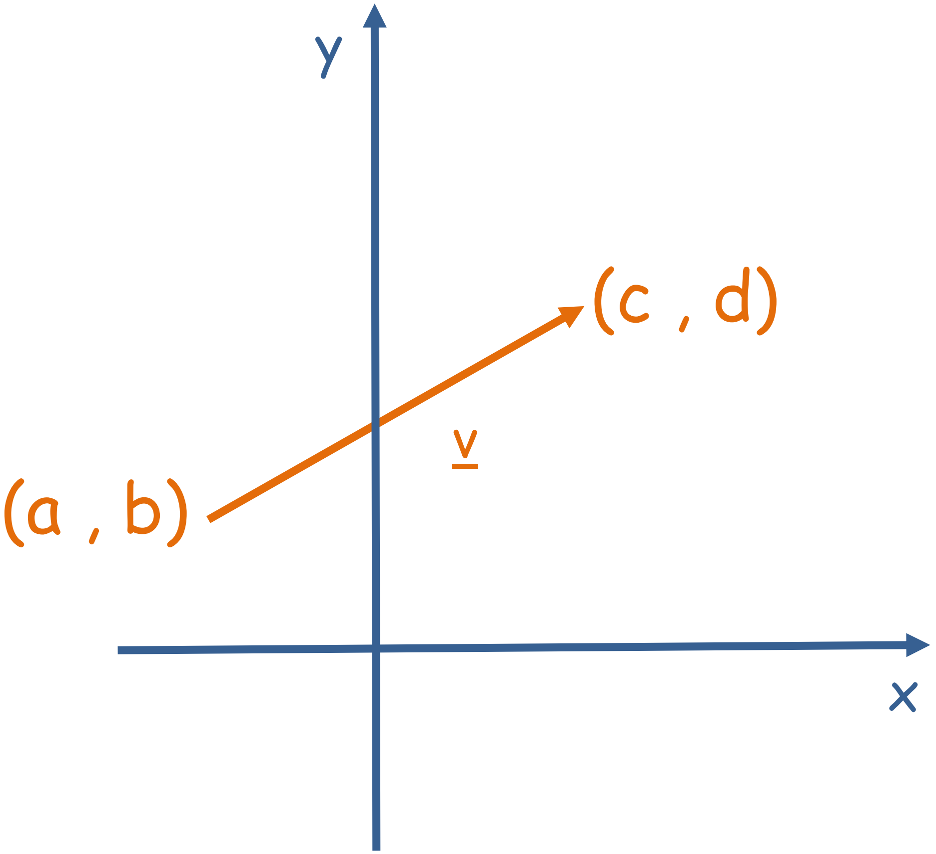
Una combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ … $\underline{v}_n$ dello spazio vettoriale V su K è un'espressione del tipo $a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \ldots a_n \underline{v}_n$

Vettori nel piano cartesiano



- Direzione → retta che congiunge i punti P e O
- Verso → freccia in P
- Modulo → $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

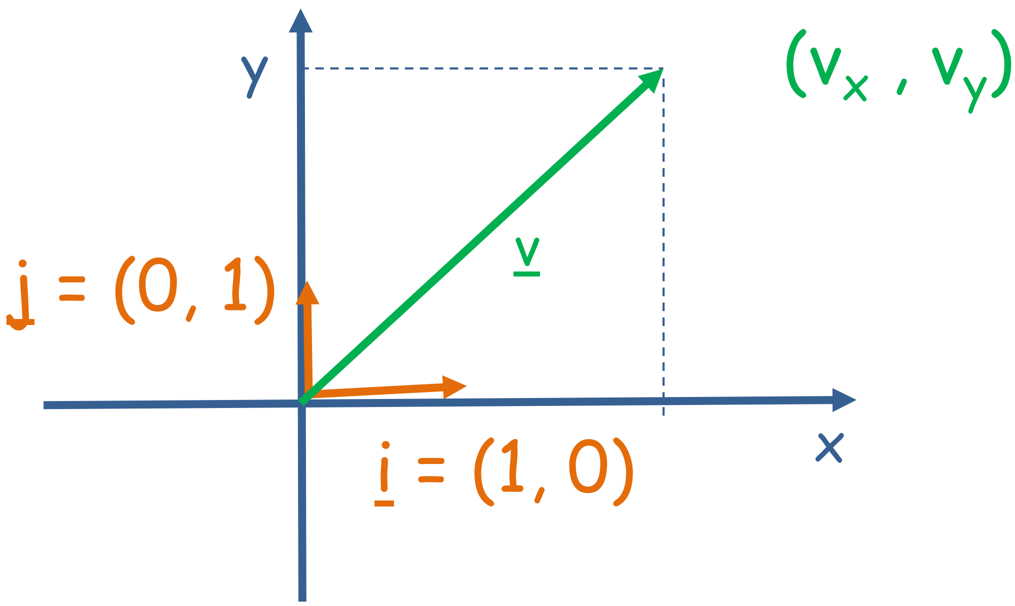
Vettori nel piano cartesiano



$\underline{v} = (c-a\ ,\ d-b)$

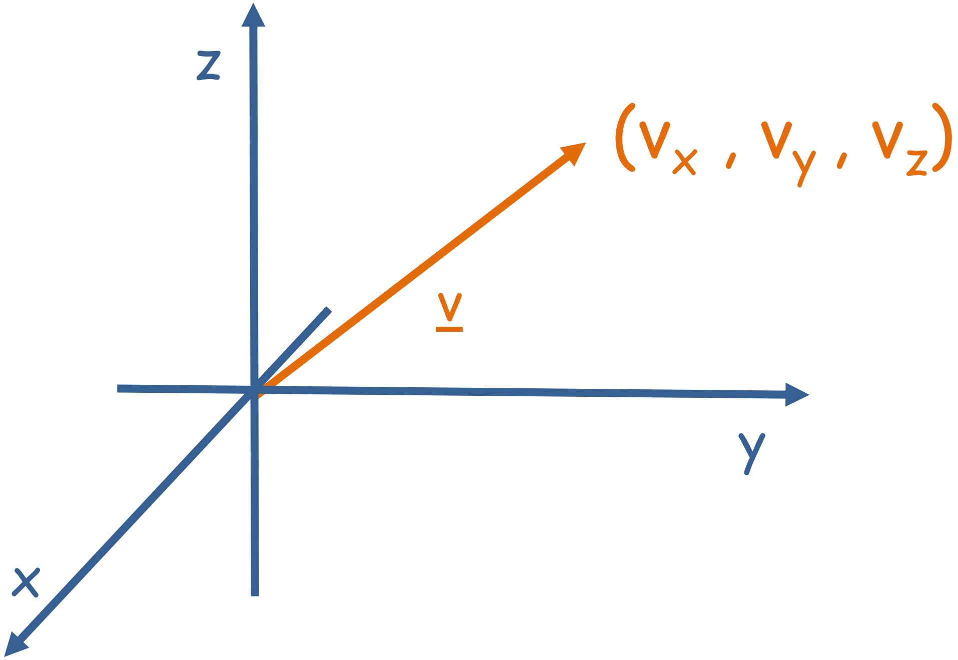
$\underline{0} = (0\ ,\ 0)$

Versori degli assi 2D



$$\underline{v} = (v_x , v_y) = v_x \, \underline{i} + v_y \, \underline{j}$$

Versori degli assi 3D



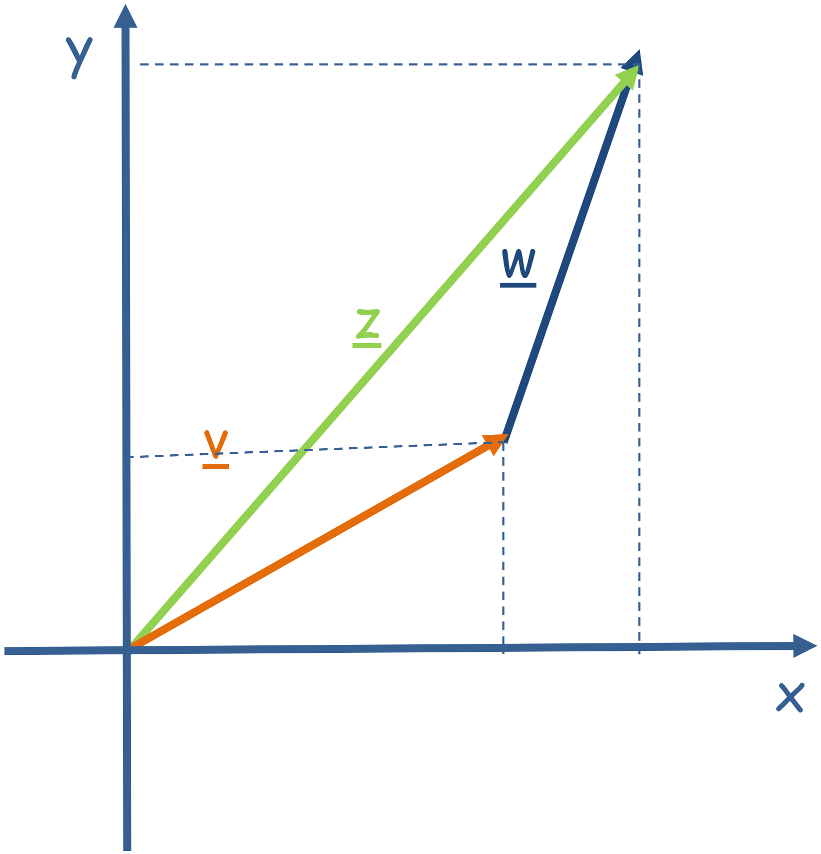
$\underline{i} = (1, 0, 0)$

$\underline{j} = (0, 1, 0)$

$\underline{k} = (0, 0, 1)$

$$\underline{v} = (v_x , v_y , v_z) = v_x\,\underline{i} + v_y\,\underline{j} + v_z\,\underline{k}$$

Somma di vettori



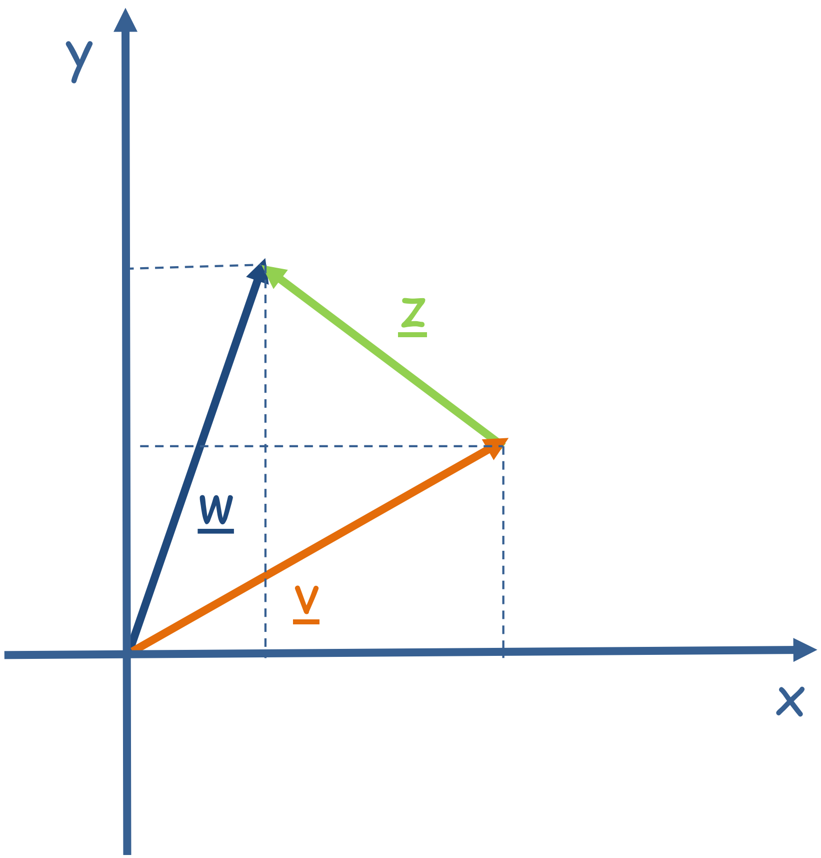
$\underline{v} = (v_x\ ,\ v_y)$

$\underline{w} = (w_x\ ,\ w_y)$

$\underline{z} = \underline{v} + \underline{w}$

$(z_x\ ,\ z_y) = (v_x + w_x\ ,\ v_y + w_y)$

Sottrazione tra vettori



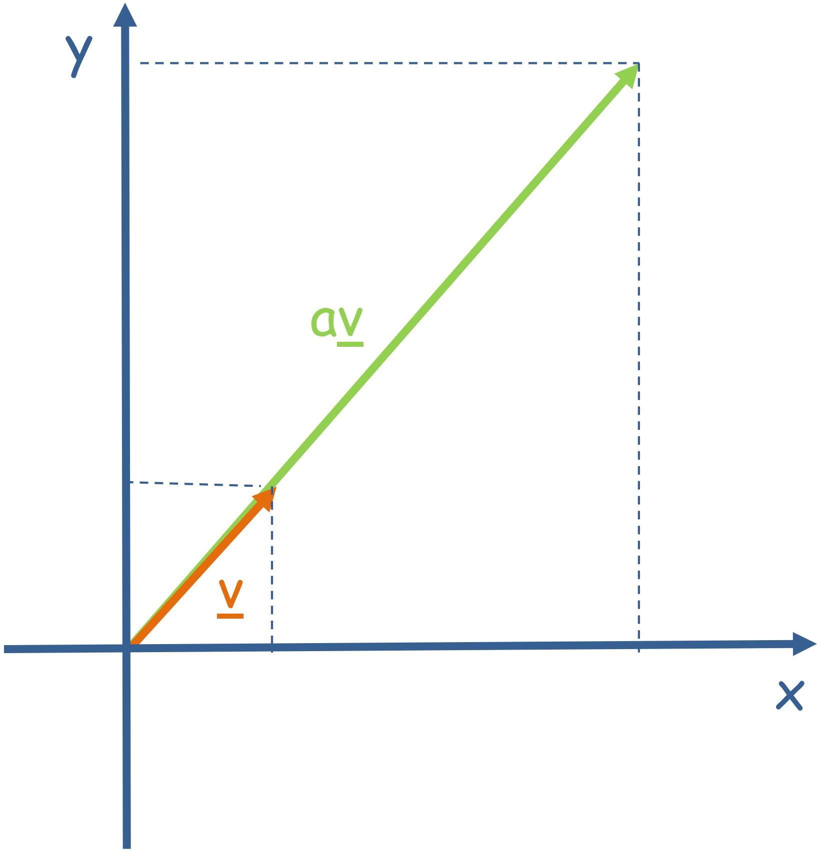
$\underline{v} = (v_x\ ,\ v_y)$

$\underline{w} = (w_x\ ,\ w_y)$

$\underline{z} = \underline{v} - \underline{w}$

$(z_x\ ,\ z_y) = (v_x - w_x\ ,\ v_y - w_y)$

Prodotto di uno scalare per un vettore o prodotto esterno



$$\underline{v} = (v_x\ ,\ v_y)$$

$$\underline{z} = a\underline{v}$$

$$(z_x\ ,\ z_y) = (av_x\ ,\ av_y)$$

Prodotto scalare tra vettori

$$\underline{v} \circ \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cos\theta$$

$$\underline{i} \circ \underline{i} = |\underline{i}| \cdot |\underline{i}| \cos 0 = 1 \qquad \underline{j} \circ \underline{j} = |\underline{j}| \cdot |\underline{j}| \cos 0 = 1$$

$$\underline{i} \circ \underline{j} = |\underline{i}| \cdot |\underline{j}| \cos 90° = 0$$

$$\begin{aligned}\underline{v} \circ \underline{w} &= (v_x\, \underline{i} + v_y\, \underline{j}) \circ (w_x\, \underline{i} + w_y\, \underline{j}) \\ &= v_x\, w_x\, \underline{i} \circ \underline{i} + v_x\, w_y\, \underline{i} \circ \underline{j} + v_y\, w_x\, \underline{j} \circ \underline{i} + v_y\, w_y\, \underline{j} \circ \underline{j} \\ &= v_x\, w_x + v_y\, w_y\end{aligned}$$

Angolo tra due vettori

$$\underline{v} \circ \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\underline{v} \circ \underline{w}}{|\underline{v}| \cdot |\underline{w}|}$$

$$\underline{v} \circ \underline{w} = v_x w_x + v_y w_y$$

Prodotto vettoriale tra vettori

$$|\underline{v} \times \underline{w}| = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \sin\theta$$

$$|\underline{i} \times \underline{i}| = |\underline{i}| \cdot |\underline{i}| \sin 0 = 0 \qquad |\underline{j} \times \underline{j}| = |\underline{j}| \cdot |\underline{j}| \sin 0 = 0$$

$$|\underline{i} \times \underline{j}| = |\underline{i}| \cdot |\underline{j}| \sin 90° = 1$$

$$\underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}$$

$$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k} \qquad \underline{j} \times \underline{k} = \underline{i} \qquad \underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$$

$$\underline{j} \times \underline{i} = -\underline{k} \qquad \underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i} \qquad \underline{i} \times \underline{k} = -\underline{j}$$

Prodotto vettoriale tra vettori

$$\underline{v} \times \underline{w} = (v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k}) \times (w_x \underline{i} + w_y \underline{j} + w_z \underline{k})$$

$$= v_x w_x \underline{i} \times \underline{i} + v_x w_y \underline{i} \times \underline{j} + v_x w_z \underline{i} \times \underline{k} + v_y w_x \underline{j} \times \underline{i}$$
$$+ v_y w_y \underline{j} \times \underline{j} + v_y w_z \underline{j} \times \underline{k} + v_z w_x \underline{k} \times \underline{i}$$
$$+ v_z w_y \underline{k} \times \underline{j} + v_z w_z \underline{k} \times \underline{k}$$

$$= (v_y w_z - v_z w_y) \underline{i} - (v_x w_z - v_z w_x) \underline{j} + (v_x w_y - v_y w_x) \underline{k}$$

Spazi vettoriali n dimensionali

$$\underline{v} = (v_1, v_2 \dots, v_n) = v_1 \cdot \underline{e}_1 + v_2 \cdot \underline{e}_2 + v_n \cdot \underline{e}_n$$

$$\underline{e}_1 = (1, 0 \dots, 0) \quad \underline{e}_2 = (0, 1 \dots, 0) \qquad \underline{e}_n = (0, 0 \dots, 1)$$

$$\underline{v} + \underline{w} = (v_1, v_2 \dots, v_n) + (w_1, w_2 \dots, w_n)$$
$$= (v_1 + w_1, v_2 + w_2 \dots, v_n + w_n)$$

$$a\underline{v} = a(v_1, v_2 \dots, v_n) = (av_1, av_2 \dots, av_n)$$

$$\underline{v} \circ \underline{w} = (v_1, v_2 \dots, v_n) \circ (w_1, w_2 \dots, w_n)$$
$$= v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 \dots + v_n \cdot w_n \quad = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i$$

Dipendenza e indipendenza lineare

$$\underline{v}_1 , \underline{v}_2 \dots , \underline{v}_n$$

$$a_1 \underline{v}_1 ,+ a_2 \underline{v}_2 \dots + a_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

I vettori $\underline{v}_1 , \underline{v}_2 \dots , \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti se $a_1 , a_2 \dots , a_n$ sono tutti nulli.

Altrimenti si dice che i vettori $\underline{v}_1 , \underline{v}_2 \dots , \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti.

Siano $\underline{v} = (0, 2, -5)$ e $\underline{w} = (-2, 3)$ due vettori dello spazio 3 dimensionale. Calcolare:

- il modulo di $\underline{v}$,
- la somma di $\underline{v}$ e $\underline{w}$,
- la differenza tra $\underline{v}$ e $\underline{w}$,
- il prodotto di $\underline{w}$ per il modulo di $\underline{v}$,
- il prodotto scalare tra $\underline{v}$ e $\underline{w}$,
- l'angolo tra i due vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$,
- il prodotto vettoriale tra $\underline{w}$ e $\underline{v}$.

Sia $\underline{z} = (0, 0, 1)$. I 3 vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ e $\underline{z}$ sono linearmente indipendenti?