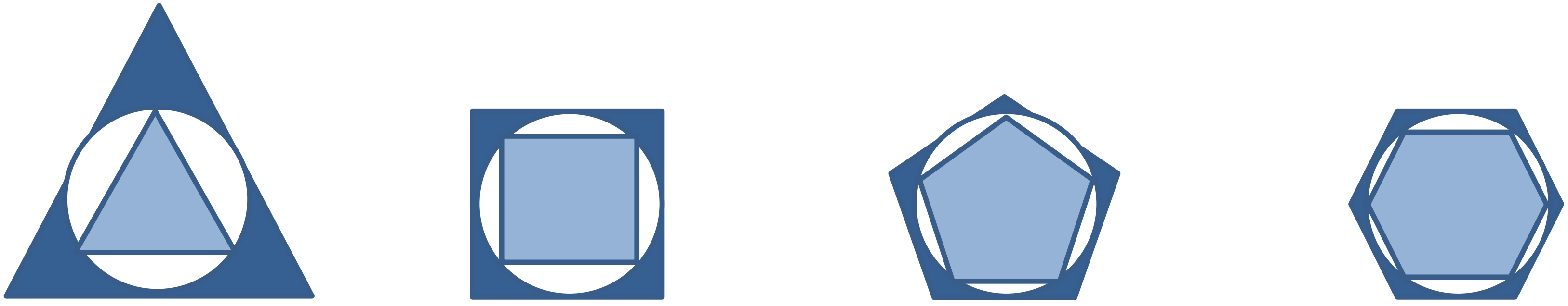
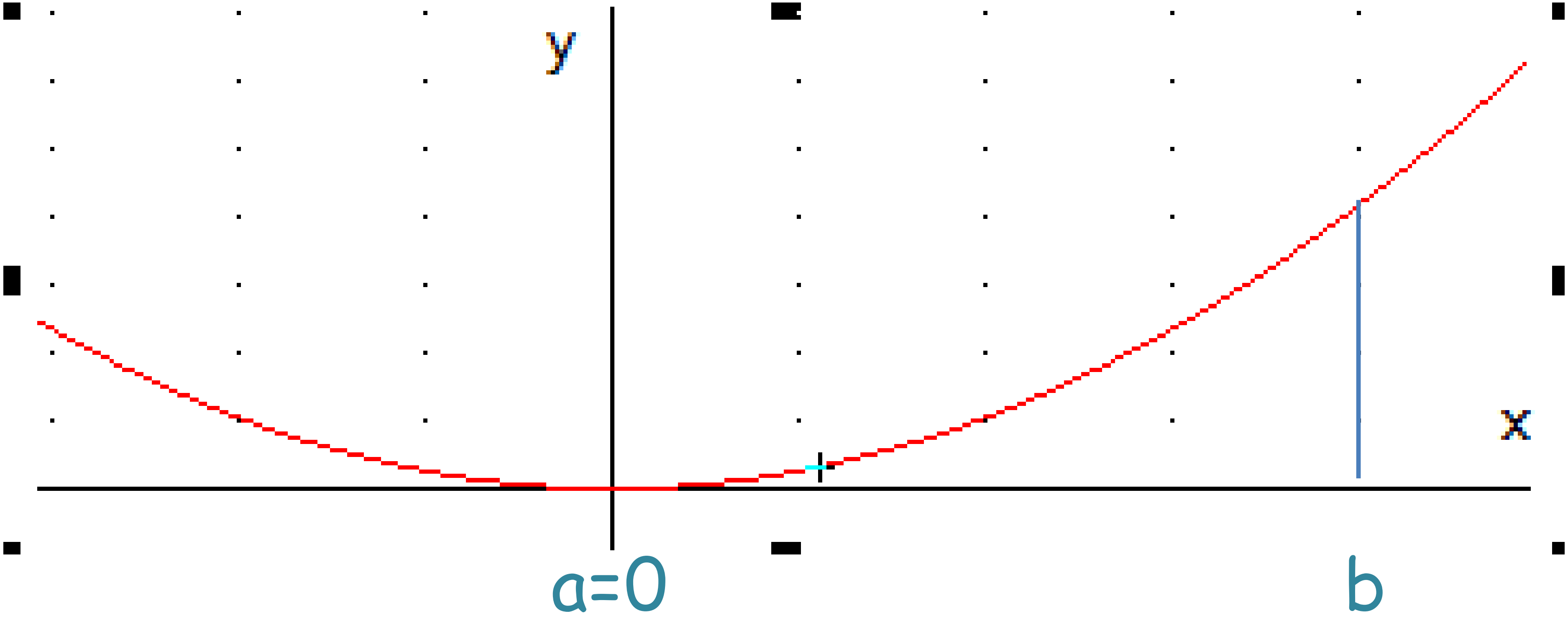
Calcolo integrale

Il metodo di esaustione

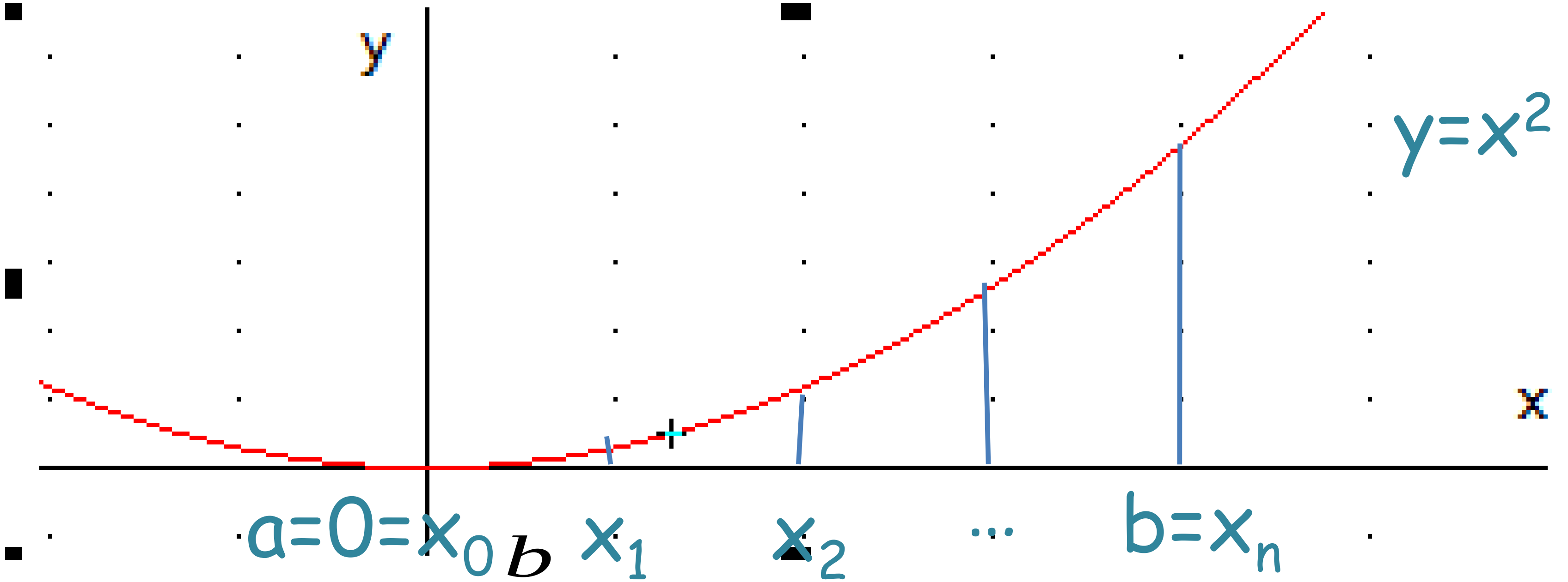


Il metodo di esaustione

$y=x^2$



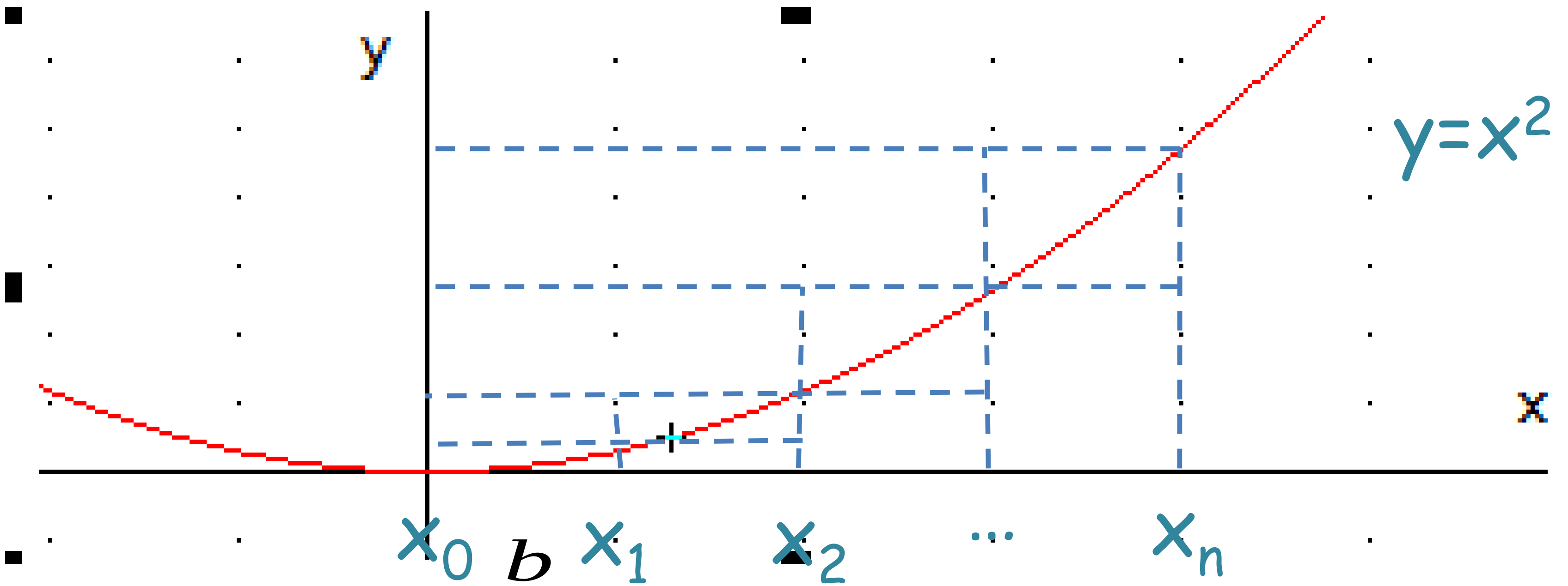
Il metodo di esaustione



$$\frac{b}{n}$$

$$x_k = k\,\frac{b}{n}$$

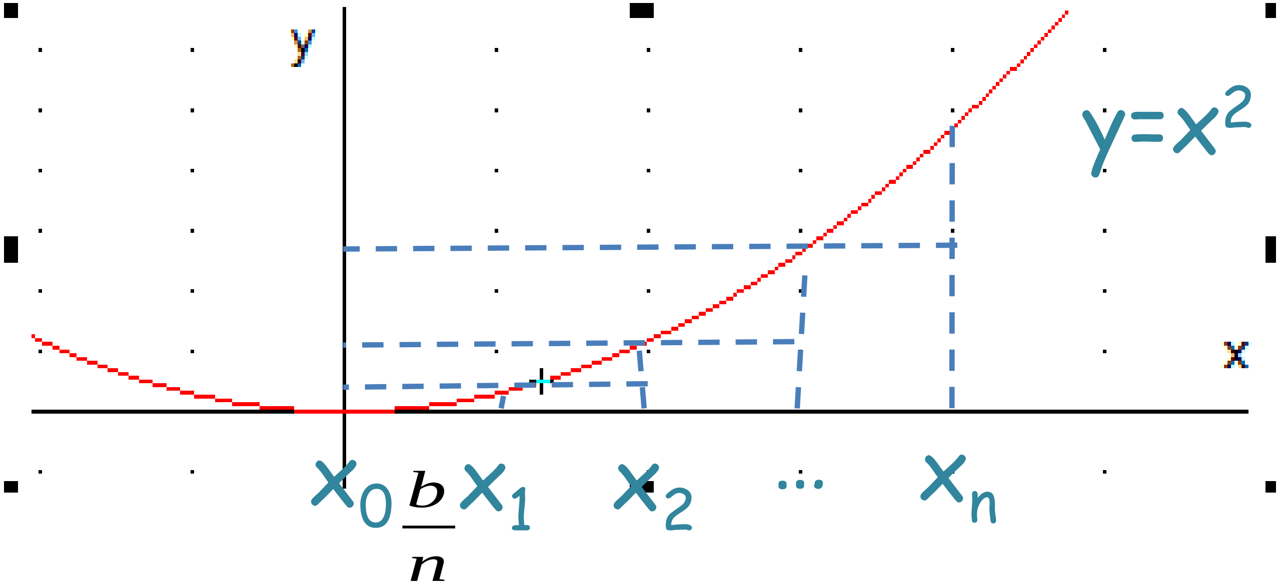
Il metodo di esaustione



$$\frac{b}{n}$$

$$x_k = k\frac{b}{n} \qquad f(x_k) = \left(\frac{kb}{n}\right)^2$$

Il metodo di esaustione

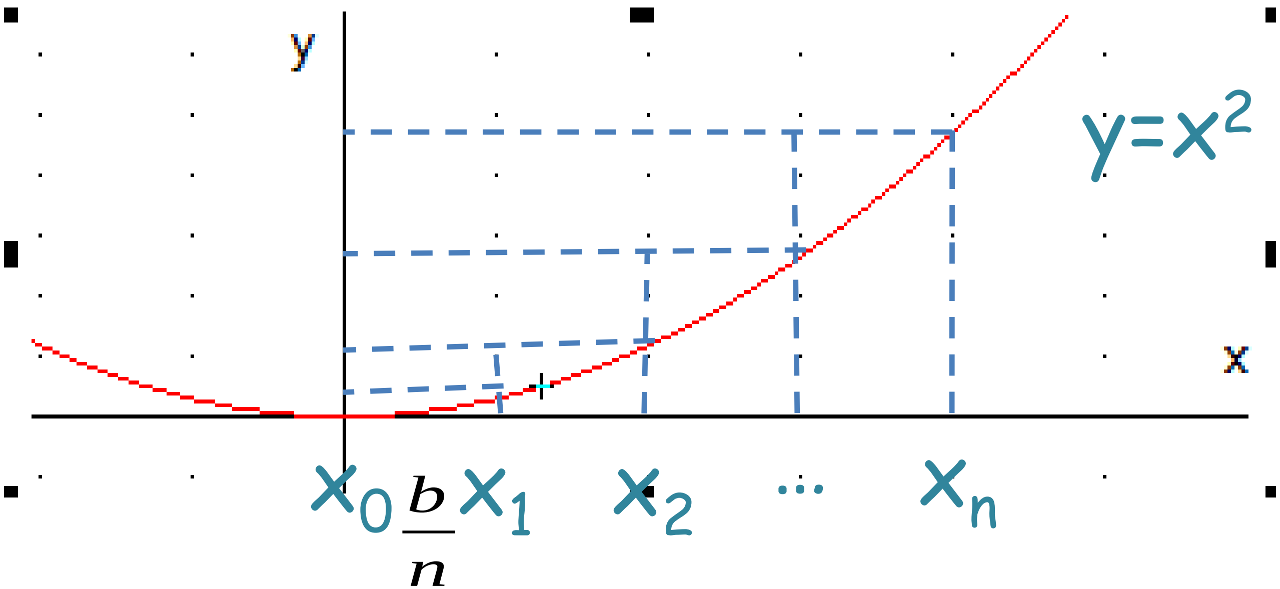


$$x_k = k\frac{b}{n}$$

$$f(x_k) = \left(\frac{kb}{n}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{b(k-1)}{n}\right)^2$$

Il metodo di esaustione



$$x_k = k\frac{b}{n}$$

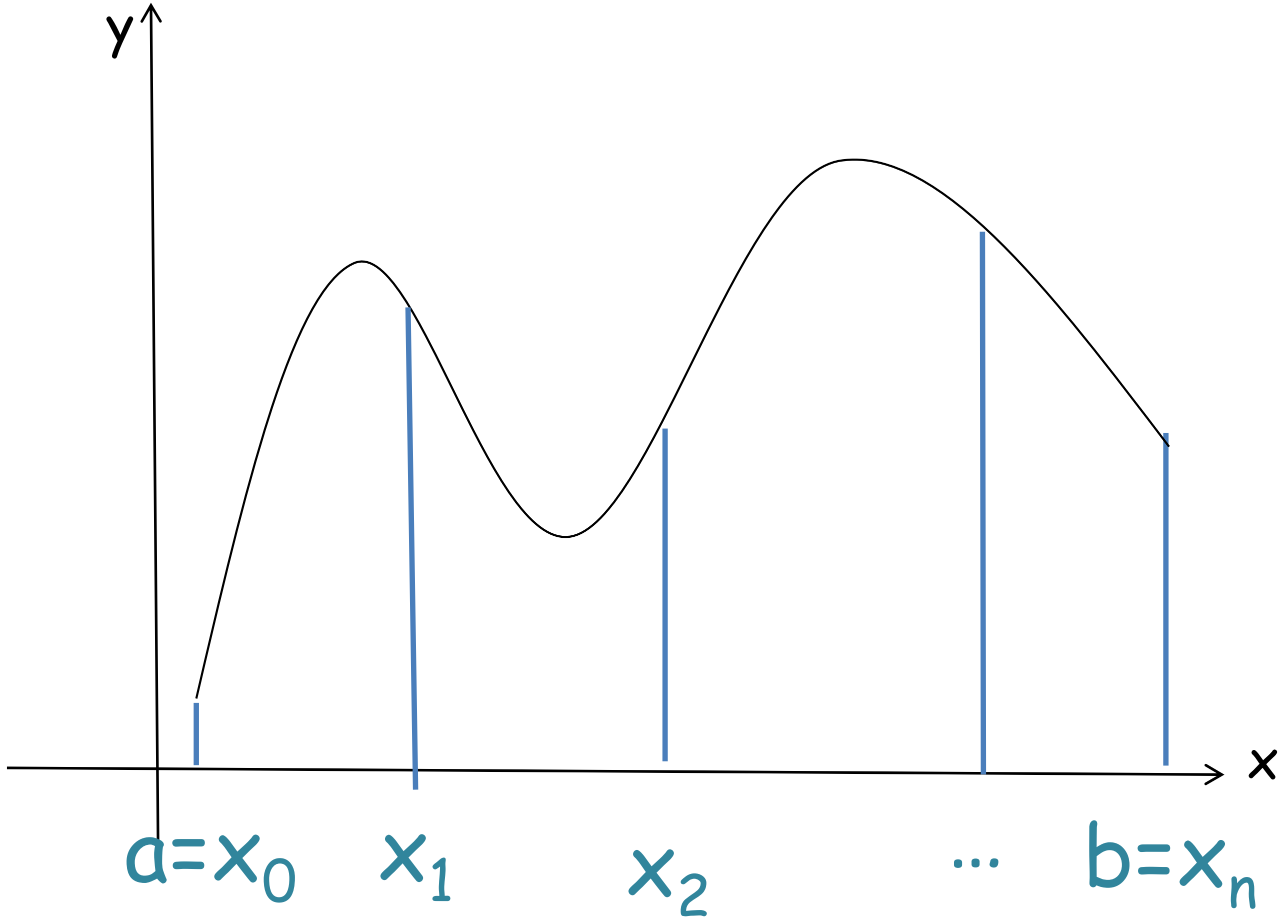
$$f(x_k) = \left(\frac{kb}{n}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b}{n}\left(\frac{b(k-1)}{n}\right)^2 < A < \sum_{k=1}^{n}\frac{b}{n}\left(\frac{bk}{n}\right)^2$$

$$\sum_{x=1}^{n}(x)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

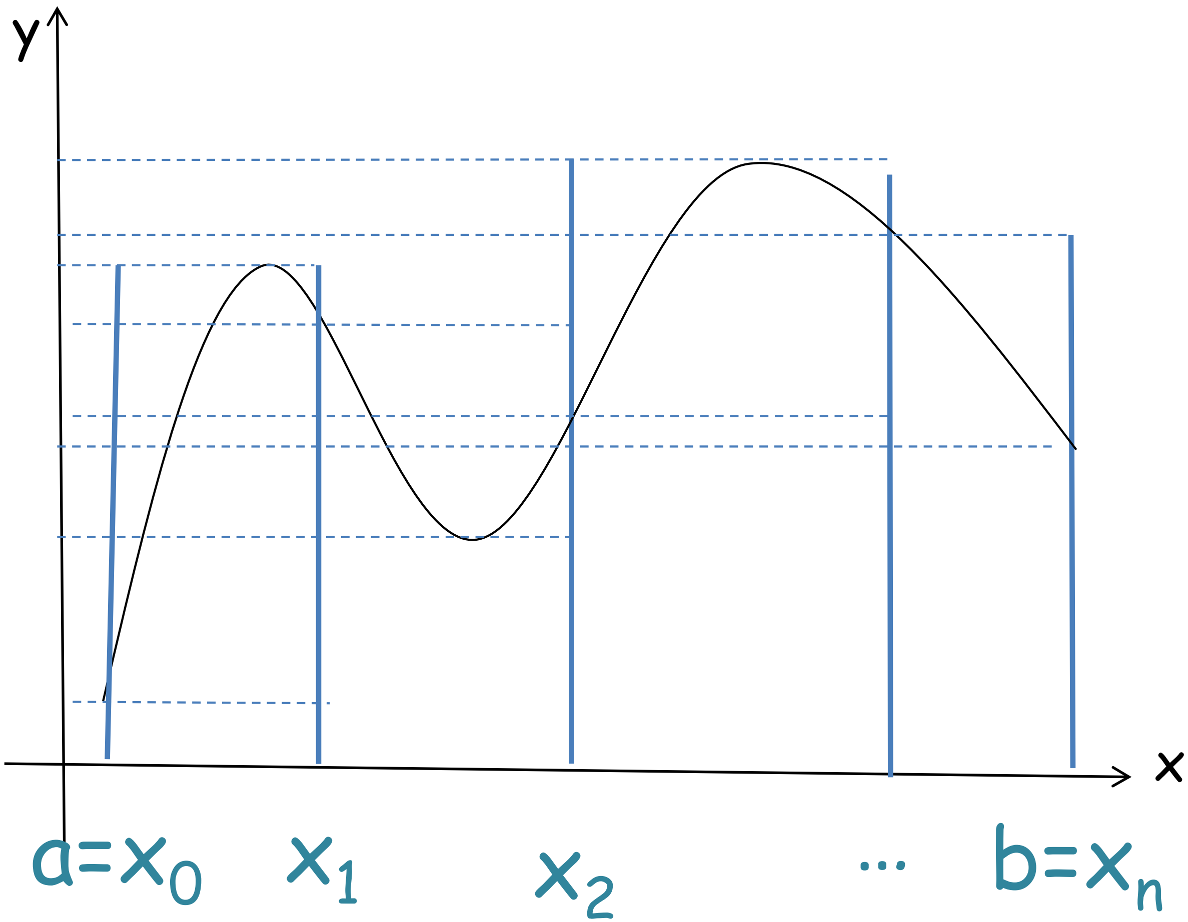
Integrale definito

Sia f: [a,b]→ R, positiva e continua.



Integrale definito

Sia f: [a,b]→ R, positiva e continua.



$x_i - x_{i-1}$

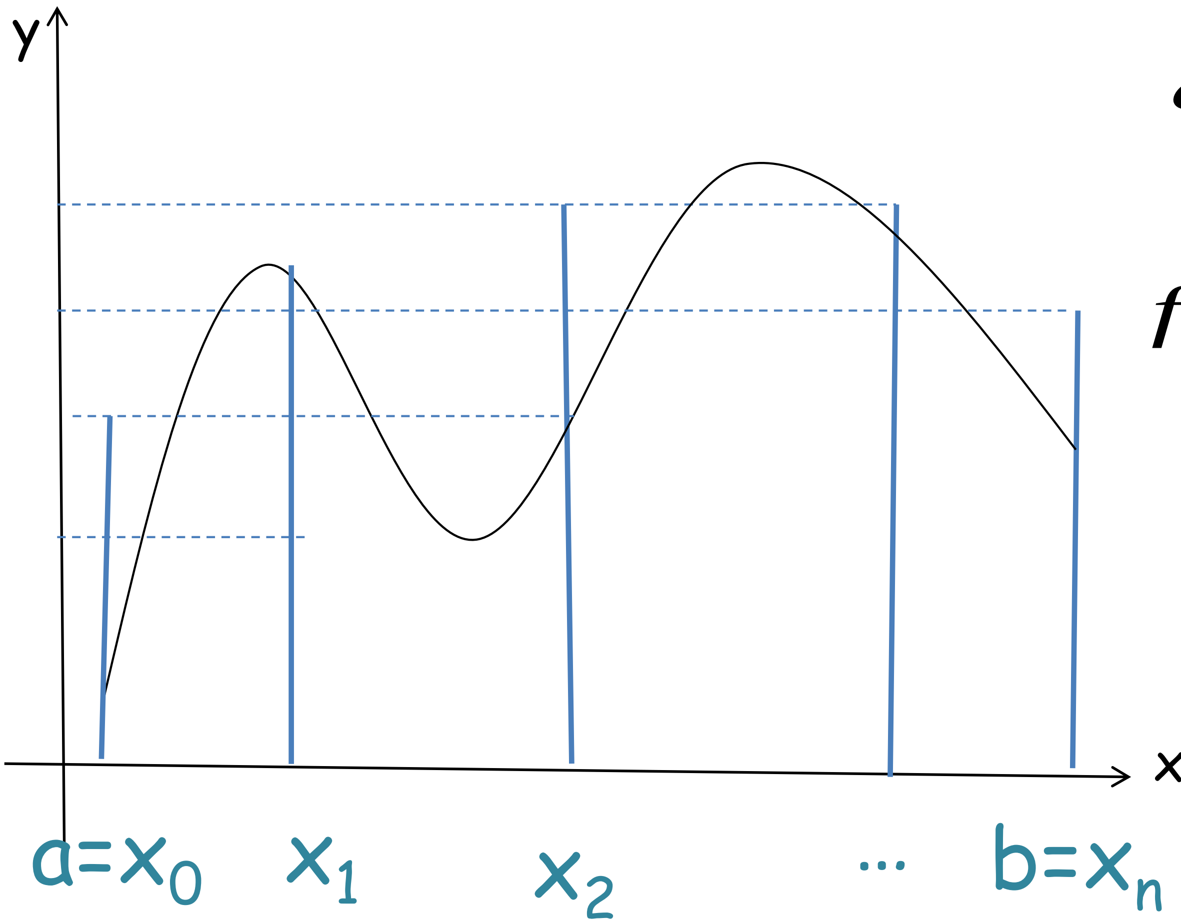
$i=1,\dots,n$

$$m_i = \min_{x_{i-1}<x<x_i} f(x)$$

$$M_i = \max_{x_{i-1}<x<x_i} f(x)$$

Somme di Riemann

Sia f: [a,b]→ R, positiva e continua.



$$\delta = \max_{i=1,\dots n}(x_i - x_{i-1})$$

$$f(\xi_i)$$

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

Somme di Riemann

Sia f: [a,b]→ R continua.
Essa è integrabile in [a,b] se esiste ed è

finito il $\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k) = \int_a^b f(x)dx$

Calcolo delle Aree

Sia f: [a,b]→ R positiva e continua.
L'area sottesa dal grafico di f nell'intervallo [a,b] è $=\int_a^b f(x)dx$.

Sia f: [a,b]→ R negativa e continua.
L'area sottesa dal grafico di f nell'intervallo [a,b] è $=-\int_a^b f(x)dx$.

Proprietà di linearità dell'integrale definito

Siano f e g: [a,b]→ R integrabili nel dominio, allora:

1. $$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. $$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

Proprietà dell'integrale definito

Sia f : [a,b]→ R integrabile nel dominio, allora:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Calcolo delle Aree

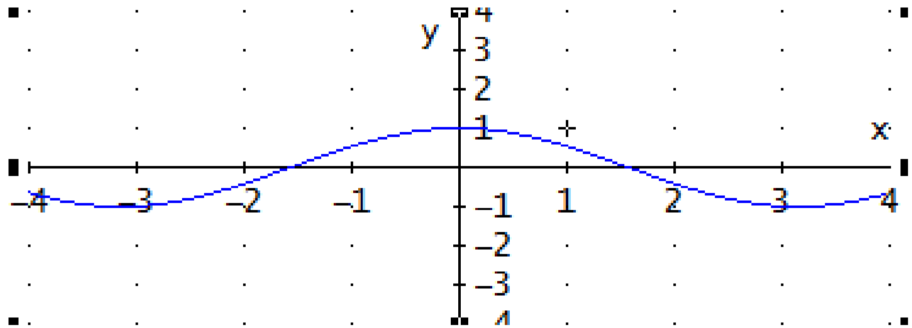
Sia f: [a,b]→ R continua.
Sia D+ il sottoinsieme del dominio in cui la funzione f è positiva e D- il sottoinsieme del dominio in cui la funzione f è negativa.
L'area sottesa dal grafico di f nell'intervallo [a,b] è $= \int_{D+} f(x)dx - \int_{D-} f(x)dx$.

Integrale definito di funzioni pari

Sia f: [-a,a]→ R integrabile e pari.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

$$= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

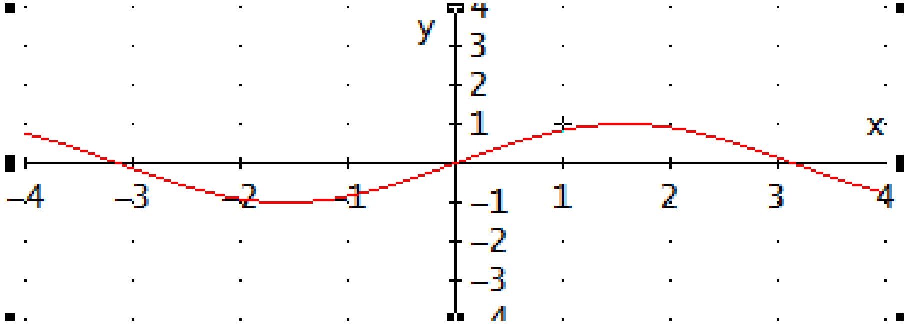


Integrale definito di funzioni dispari

Sia f: [-a,a]→ R integrabile e dispari.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

$$= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \quad = 0$$



Proprietà dell'integrale definito

Siano f e g : [a,b]→ R integrabili nel dominio, allora:

1. $$\int_a^b c \cdot dx = c(b-a)$$

2. se $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ $$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Teorema

Sia $f : [a,b] \rightarrow R$ continua nel dominio, allora f è integrabile in A.

Teorema della media

Sia $f : A=[a,b] \rightarrow R$ continua in A, allora $\exists\ x_0 \in A$ |

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a)$$

Integrale indefinito

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)$$

funzione integranda

funzione integrale

Teorema di Torricelli-Barrow
o
T. fondamentale del calcolo integrale

Sia f : [a,b]→ R integrabile in [a,b] e sia

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Se f(t) è continua allora F(x) è derivabile e F'(x)=f(x).

F(x) è detta primitiva di f(x) ed è quella funzione la cui derivata è f(x).

Integrali indefiniti

Sia f : [a,b]→ R integrabile in [a,b] e sia

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Se F(x) è una primitiva di f(x), anche G(x)=F(x)+c è una primitiva di f(x).

$$F(x)+c=\int_a^x f(t)dt$$

$$F(a)+c=\int_a^a f(t)dt=0$$

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)dt$$

Integrali indefiniti

Sia f : [a,b]→ R integrabile in [a,b] e sia

$$F(x)+c=\int_a^x f(t)dt$$ allora

$$D[F(x)+c]=D\int f(t)dt=f(x)$$

e

$$G(x)+c=\int D[f(t)]dt$$

$$D[G(x)+c]=D[f(x)] \qquad G(x)+c=f(x)$$

Risoluzione degli integrali definiti

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

1. Determinare la primitiva F(x) risolvendo l'integrale indefinito $\int f(t)dt$.

2. Calcolare la primitiva in b e in a e sottrarre i risultati.

Risoluzione degli integrali indefiniti

Integrali immediati

$$\int c \cdot dx = c \cdot x$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \qquad x>0$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

Risoluzione degli integrali indefiniti

Integrali immediati

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc\tan x + c$$

Esercizi

$$\int \left(\frac{1}{x} - \cos x \right) dx$$

$$\int \tan^2 x \cdot dx$$

$$\int \frac{1 - x^4}{1 - x^2} dx$$

Esercizi

$$\int_{1}^{2}\left(e^{x}+x^{3}\right)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cdot dx$$

$$\int_{e}^{e^{3}}\frac{1}{x}\,dx$$

Risoluzione degli integrali indefiniti

Riconoscimento di funzioni composte

$$\int g'[f(x)]\cdot f'(x)dx = g(x)+c$$

$$\int 7\cdot e^{7x}dx$$

$$\int \frac{1}{2x-1}\cdot 2dx$$

$$\int (6x-2)\cos(3x^2-2x)dx$$

Risoluzione degli integrali indefiniti

Riconoscimento di funzioni composte

$$\int g`[f(x)]\cdot f`(x)dx = g(x)+c$$

$$\int_0^1 e^{3x+1}dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\pi-1} \tan(2x+1)dx$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{4x}{\cos^2(2x^2)}dx$$

Risoluzione degli integrali indefiniti

Integrazione per parti

$$\int g`(x) \cdot f(x) \cdot dx = g(x) \cdot f(x) - \int g(x) \cdot f`(x) \cdot dx$$

$$\int x \cdot e^x dx$$

$$\int x^2 \cdot e^x dx$$

$$\int \ln(x) \cdot dx$$

Risoluzione degli integrali definiti

Integrazione per parti

$$\int_a^b g`(x)\cdot f(x)\cdot dx = [g(x)\cdot f(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\cdot f`(x)\cdot dx$$

$$\int_0^{\pi} x\cdot \sin x\cdot dx$$

$$\int_{-2}^{1} x\cdot e^{2x}\cdot dx$$

$$\int_1^2 x^2\cdot \ln(x)\cdot dx$$

Risoluzione degli integrali indefiniti

Integrazione per sostituzione

$$\int f(x) \cdot dx$$ pongo $$x = \varphi(t)$$

con φ invertibile

$$t = \varphi^{-1}(x)$$

$$dx = d\left[\varphi(t)\right] = \varphi`(t) \cdot dt$$

$$\int f(x) \cdot dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi`(t) \cdot dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Risoluzione degli integrali indefiniti

Integrazione per sostituzione

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$ pongo $$\sqrt{x} = t$$

$$\int \sqrt{1+x}\cdot dx$$ pongo $$\sqrt{x+1} = t$$

$$\int x\sqrt{x-1}\cdot dx$$ pongo $$\sqrt{x-1} = t$$

Risoluzione degli integrali indefiniti

Integrazione per sostituzione

$$\int_a^b f(x)\cdot dx$$ pongo $$x=\varphi(t)$$ $$t=\varphi^{-1}(x)$$

con φ invertibile

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = F(b)-F(a)$$

$$t_a=\varphi^{-1}(a)$$

$$t_b=\varphi^{-1}(b)$$

$$dx = d\left[\varphi(t)\right] = \varphi`(t)\cdot dt$$

Risoluzione degli integrali definiti

Integrazione per sostituzione

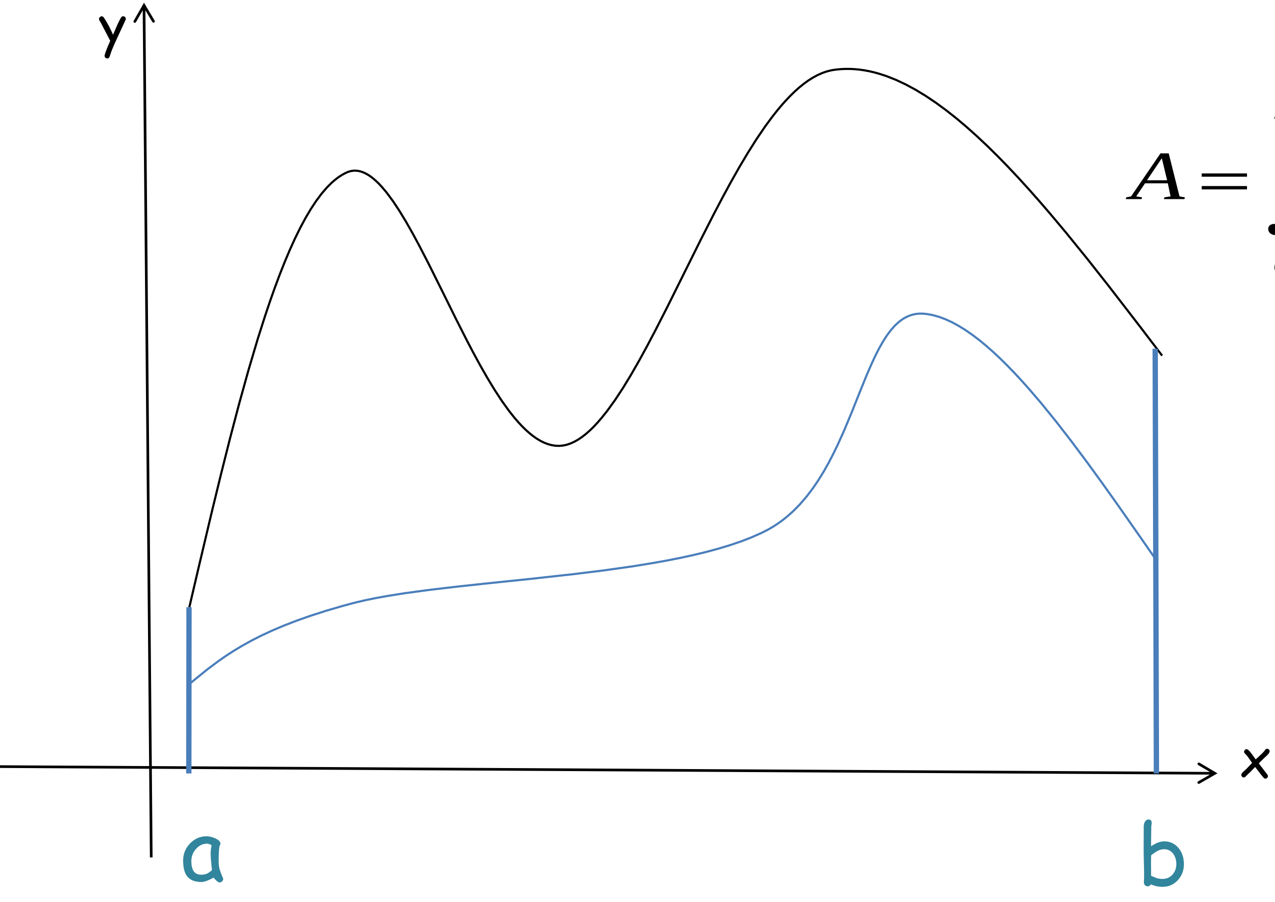
$$\int_1^2 \frac{\sin\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\,dx$$ pongo $$\sqrt{x-1}=t$$

$$\int_0^3 \sqrt{4-x}\cdot dx$$ pongo $$\sqrt{4-x}=t$$

$$\int_{-1}^0 x^2\sqrt{x+1}\cdot dx$$ pongo $$\sqrt{x+1}=t$$

Calcolo delle Aree

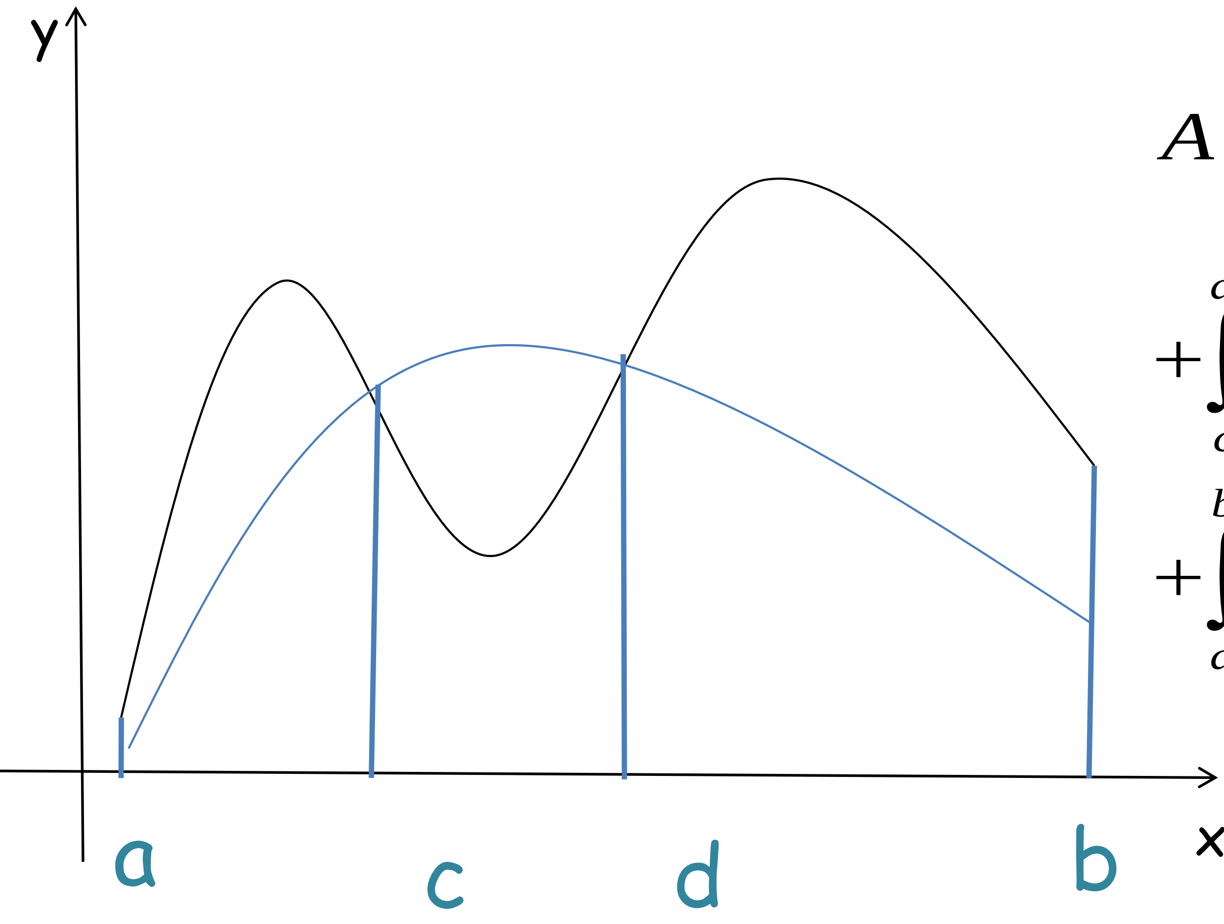
Sia f e g: [a,b]→ R continue | f(x) ≥ g(x).



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Calcolo delle Aree

Sia f e g: [a,b]→ R continue.



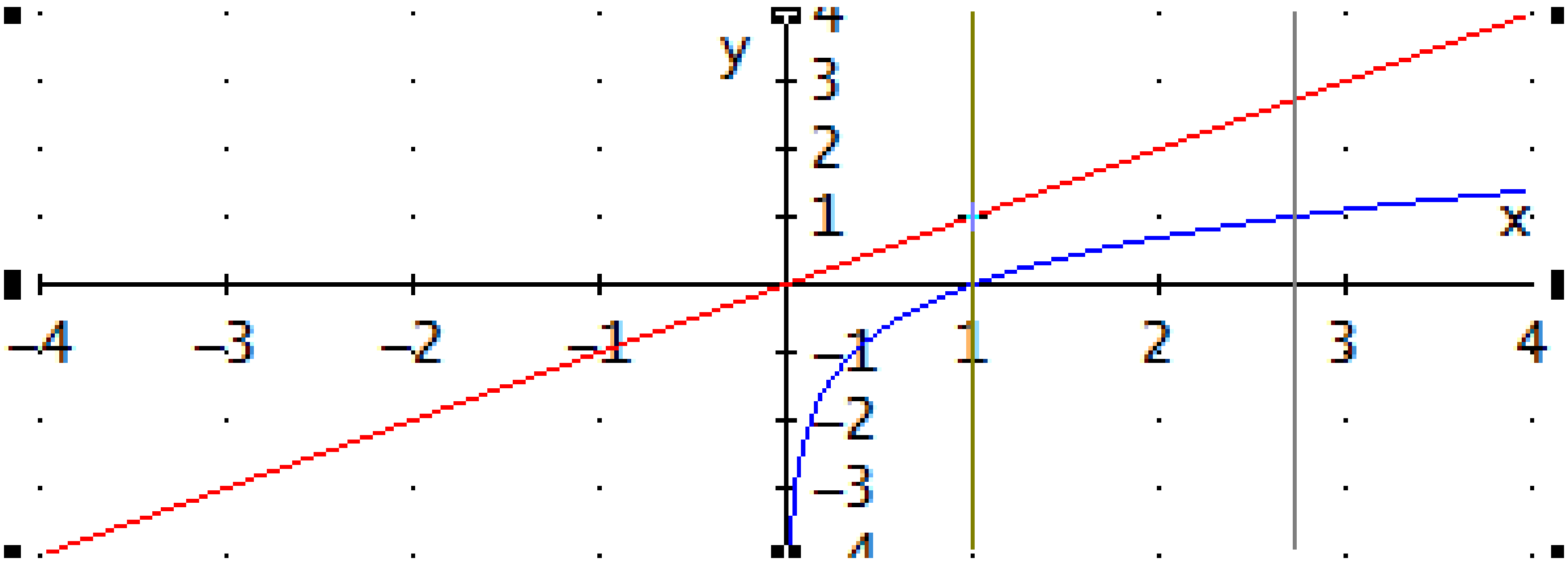
$$A=\int_a^c [f(x)-g(x)]dx$$

$$+\int_c^d [g(x)-f(x)]dx$$

$$+\int_d^b [f(x)-g(x)]dx$$

Calcolo delle Aree

Sia f(x)=x e g(x)=ln(x).



$$A = \int_a^b [x - \ln(x)]\, dx$$