

Informatica

Logica e
Algebra di
Boole



La **logica** è la scienza del corretto ragionamento e consiste nello studio dei principi e dei metodi che consentono di individuare il corretto ragionamento.

Lo studioso di logica si chiede se la conclusione segue correttamente dalle premesse fornite e se le premesse sono buone per accettare la conclusione.

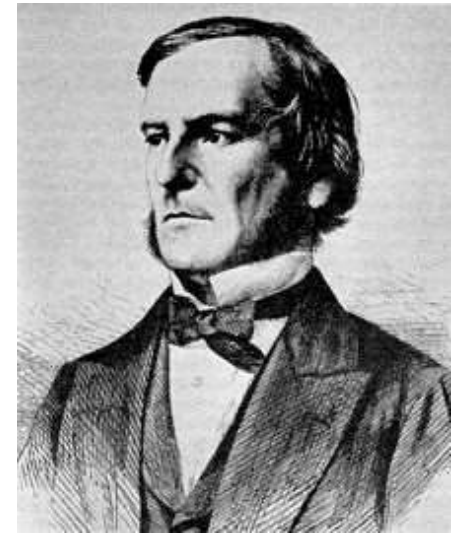
Logica \leftrightarrow Matematica

Aristotele (300 a.c.) è stato un filosofo, scienziato e logico greco antico. Fu il primo a formalizzare ‘i corretti ragionamenti’. La dialettica aristotelica può essere infatti considerata come il primo tentativo di costruire una logica formale.



La logica aristotelica è di fatto la prima forma storica di calcolo letterale, fondamento dell'algebra, perché per la prima volta si utilizza l'astrazione (qualcosa per indicare una terza cosa qualsiasi: lettera, parola, volendo anche un numero) e per questo scopo di astrazione si usano le lettere dell'alfabeto.

George Boole è stato un matematico e logico britannico, vissuto nell'800. E' considerato il fondatore della logica matematica e la sua opera influenzò anche settori della filosofia.



Egli creò una disciplina scientifica della logica sorretta da un metodo: dopo aver rilevate le analogie fra oggetti dell'algebra e oggetti della logica, ricondusse le composizioni degli enunciati a semplici operazioni algebriche. L'opera di Boole è stata la base (grazie a Claude Shannon, che ha riconosciuto la coincidenza tra il funzionamento dei circuiti commutatori e la logica proposizionale), per gli studi sui circuiti elettronici e sulla commutazione, e ha costituito un passo importante verso la concezione dei moderni computer.

Un **enunciato** è una espressione del linguaggio, cioè una sequenza di suoni con contenuto linguistico organizzati in parole e frasi, per la quale ha senso domandarsi se essa è vera o falsa.

Esse prendono anche il nome di espressioni booleane.

Non sono enunciati né le frasi interrogative né le frasi imperative.

Le espressioni booleane si indicano con lettere minuscole: p, q, \dots

Il cane di Marco è nero.

$$2+1=3$$

$$5>2$$

La luna è lontana.

Hai sonno?

Che bello!

Ad ogni espressione booleana può essere associato un valore di verità (vero V o falso F).

In Informatica due diversi valori possono rappresentare varie situazioni:

Passa corrente con intensità i	NON passa corrente
Magnetizzato	NON magnetizzato
Carica C	Carica nulla
Interruttore aperto	Interruttore chiuso

Ad ogni espressione booleana può essere associato un valore di verità (vero V o falso F).

Principio di identità: Ogni proposizione ha lo stesso valore di verità di se stessa.

Principio di non contraddizione: Una proposizione non può essere simultaneamente vera e falsa.

Principio del terso escluso: Una proposizione non può che essere vera o falsa. Non esistono altri valori di verità.

Un **enunciato aperto o predicato** è una proposizione che contiene delle variabili.

Assegnando un valore alla variabile si chiude la proposizione ed è possibile valutarne il valore di verità.

Il valore di verità del predicato dipenderà, quindi, dal valore della variabile.

È necessario precisare in quale ambito la variabile assume i valori.

Dominio della variabile

È l'insieme in cui la variabile assume i valori

Insieme di verità

È l'insieme dei valori del dominio che rendono vero il predicato

Esempio

Si consideri il predicato $A < 4$ and $(C = 3$ or $B > 0)$
e se ne valuti il valore di verità.

$\{(A, 2), (B, 3), (C, 2)\}$

$\{(A, 2), (B, -5), (C, 2)\}$

VERO

FALSO

Esercizi

Dato il seguente ambiente di valutazione

$\{(A, 2), (B, 3), (C, 2), (D, 6)\}$

Valutare le seguenti espressioni

1. $(A < 3) \text{ and } (B > 0 \text{ or } C = 3)$
2. $(B + 3 = 0) \text{ AND } (C < 1 \text{ OR } B / 3 > 0)$
3. $(D + A) = 2 \text{ or } (C > 7 \text{ and } (A > 0) \text{ or } (A < 2 \text{ OR } B > 0))$

Ripetere l'esercizio con l'ambito di valutazione

$\{(A, 1), (B, 5), (C, 2), (D, 3)\}$

Un enunciato per il quale si può determinare subito il valore di verità è detto **enunciato semplice**.

Una combinazione di enunciati, legati da opportuni operatori detti operatori logici o connettivi, è detto **enunciato composto**.

Connettivi logici

Un **connettivo** è un operatore che consente di creare proposizioni composte a partire da quelle elementari.

Connettivi unari

Negazione

p	$\neg p$
VERO	FALSO
FALSO	VERO

Connettivi binari

Congiunzione, \wedge , et, e, AND

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Connettivi binari

Disgiunzione (non esclusiva), \vee , vel, o, OR

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Connettivi binari

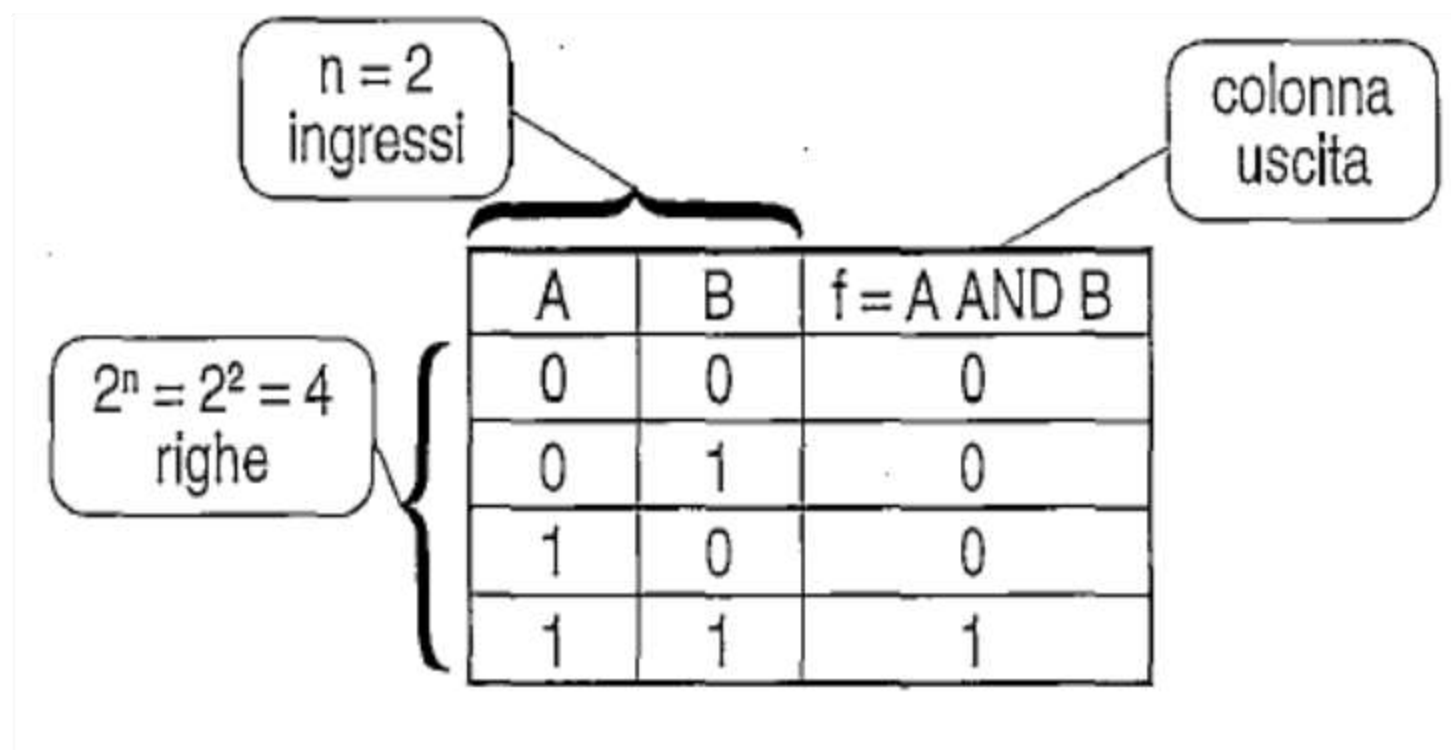
Disgiunzione esclusiva, \otimes , aut aut, o, XOR

p	q	$p \otimes q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Valutare un enunciato composto significa valutare quali valori di verità esso assume a seconda della combinazione dei valori assunti dai singoli enunciati.

Gli enunciati composti verranno valutati costruendo la cosiddetta tavola di verità, una tabella contenente i valori di verità assunti dagli enunciati semplici e calcolando i risultati delle operazioni logiche.

Come si fanno le tavole di verità



Esercizi

Determinare il valore di verità della proposizione
p and (not q)

p	q	not q	p and (not q)
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

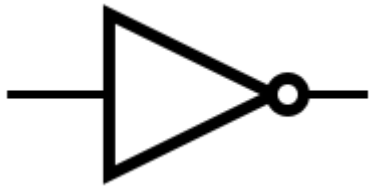
Esercizi

Determinare il valore di verità delle seguenti proposizioni:

- $P \text{ and } (P \text{ or } Q)$
- $(P \text{ and } P) \text{ or } Q$
- $Q \text{ or } (P \text{ and } R)$
- $R \text{ or } (\text{not } R \text{ and } Q)$

Porte logiche

Una porta logica è un circuito elementare che implementa la funzionalità degli operatori dell'algebra di Boole.



NOT



AND



OR

<http://paso.wordpress.com/2008/07/21/ripassare-le-porte-logiche-con-i-domino/>

Circuito sommatore completo

