Logica binaria

La **logica** è la scienza del corretto ragionamento e consiste nello studio dei principi e dei metodi che consentono di individuare il corretto ragionamento.

Lo studioso di logica si chiede se la conclusione segue correttamente dalla premesse fornite e se premesse sono buone per accettare la conclusione.

Logica <—> Matematica

Una **proposizione o enunciato** è una espressione del linguaggio, cioè una sequenza di suoni con contenuto linguistico organizzati in parole e frasi, per la quale ha senso domandarsi se essa è vera o falsa.

Non sono enunciati né le frasi interrogative né le frasi imperative.

Le proposizioni si indicano con lettere minuscole: p,q, …

Il cane di Marco è nero.

$2+1=3$ $x>4$

La luna è lontana.

Hai sonno?

Che bello!

Ad ogni proposizione può essere associato un valore di verità (vero V o falso F).

Principio di identità: Ogni proposizione ha lo stesso valore di verità di se stessa.

Principio di non contraddizione: Una proposizione non può essere simultaneamente vera e falsa.

Principio del terso escluso: Una proposizione non può che essere vera o falsa. Non esistono altri valori di verità.

Connettivi logici

Un **connettivo** è un operatore che consente di creare proposizioni composte a partire da quelle elementari.

Connettivi unari

Negazione

p	$\neg$ p
VERO	FALSO
FALSO	VERO

Connettivi binari

Congiunzione, $\wedge$, et, e, AND

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Connettivi binari

Disgiunzione (non esclusiva), $\vee$, vel, o,OR

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Connettivi binari

Disgiunzione esclusiva, ⊗, aut aut, o,XOR

p	q	p ⊗ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Connettivi binari

Implicazione semplice, $\Rightarrow$, se … allora

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Attenzione: Non esprime una relazione di causa effetto

Connettivi binari

Implicazione semplice, $\Rightarrow$, se … allora

Condizione sufficiente

Se c'è il presupposto p allora q vale di sicuro.
Se non c'è p, q potrebbe comunque valere
(F $\Rightarrow$ V è vero)

$$\mathbf{p \Rightarrow q} \qquad\qquad \mathbf{\neg q \Rightarrow \neg p}$$

Se sento il tuono allora c'è stato un fulmine.
Se Q è un quadrato allora è un rettangolo.

Connettivi binari

Implicazione inversa, $\Leftarrow$

p	q	$p \Leftarrow q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Connettivi binari

Implicazione inversa, $\Leftarrow$

Condizione necessaria

Se c'è il presupposto p, allora q <u>può</u> valere. Se non c'è p allora q non vale.

$$p \Leftarrow q \qquad\qquad \neg p \Rightarrow \neg q$$

Se c'è benzina allora la macchina funziona.
Se x è pari allora è divisibile per 6.

Connettivi binari

Implicazione doppia, $\Leftrightarrow$, se e solo se

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Connettivi binari

Implicazione doppia, $\Leftrightarrow$, se e solo se

Condizione necessaria e sufficiente
p è la stessa identica cosa rispetto a q.
Uno implica l'altro e viceversa.

Un poligono ha tre lati se e solo se è un triangolo.

Un uomo è un padre se e solo se ha un figlio.

Una **proposizione aperta o predicato** è una proposizione che contiene delle variabili.

Assegnando un valore alla variabile si chiude la proposizione ed è possibile valutarne il valore di verità.

Il valore di verità del predicato dipenderà, quindi, dal valore della variabile.

E' necessario precisare in quale ambito la variabile assume i valori.

Dominio della variabile

E' l'insieme in cui la variabile assume i valori

Insieme di verità

E' l'insieme dei valori del dominio che rendono vero il predicato

Il predicato può essere chiuso anche mediante l'uso dei **quantificatori**.

Quantificatore universale $\forall$ (per ogni)

Quantificatore esistenziale $\exists$ (esiste)

$\exists!$ (esiste un solo)

x è un triangolo

D: {poligoni}

$\forall$x, x è un triangolo

$\exists$x, x è un triangolo

$\exists$! x, x è un triangolo

x è un numero razionale

D: $x = p/q$ con p e q numeri naturali positivi

$\forall x$, x è un numero razionale

$\exists x$, x è un numero razionale

$\exists! \, x$, x è un numero razionale

Negazione dei quantificatori

$$\neg[\forall x, p(x)] \Leftrightarrow \exists x, \neg p(x)$$

Non tutti i cani sono bianchi.
Esiste almeno un cane che non è bianco.

$$\neg[\exists x, p(x)] \Leftrightarrow \forall x, \neg p(x)$$

Non è vero che esiste un numero pari non divisibile per 2.
Tutti i numeri pari sono divisibili per 2.

Metodi deduttivi

Modus ponens

p	Affermo che p è vera.
$p \Rightarrow q$	Affermo che $p \Rightarrow q$ è vera.
q	Ciò accade con p vero solo se anche q è vero.

Metodi deduttivi

Riduzione all'assurdo

$\neg p$ Affermo che p è falso

Per il principio di non contraddizione

$q \wedge \neg q$ Mostro che si arriva ad una contraddizione

$$\frac{\begin{array}{c}\neg p \\ q \wedge \neg q\end{array}}{p}$$

p Per il principio del terzo escluso p deve necessariamente essere vero

Voglio dimostrare che p è vero.

Metodi deduttivi

Induzione matematica

Si ha una proprietà o una formula che dipende dai valori di un numero naturale h

- *Dimostro che la proprietà è vera per il primo valore di h*
- *Ipotizzo che la proprietà sia vera per un certo valore di h e (sfruttando quanto ipotizzato) dimostro che la proprietà è vera per h+1*
- *La proprietà sarà vera per tutti i valori di h*

Metodi deduttivi

Induzione matematica – Esempio

Somma dei primi n numeri naturali

$$\sum_{h=1}^{n} h = \frac{n(n+1)}{2}$$