Teoria degli insiemi

Insiemi ed elementi

Definizione (Georg Cantor):

Un insieme è una collezione di oggetti determinati e distinti della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico. Tali oggetti si dicono elementi dell'insieme.

La definizione deve essere univoca e non soggettiva. Deve sempre essere possibile stabilire che un oggetto appartiene o non appartiene all'insieme.

Esempi:

- L'insieme delle persone simpatiche
- L'insieme degli alberi alti

Rappresentazione

Gli insiemi si indicano con lettere maiuscole mentre gli elementi con lettere minuscole.

Intensiva o per proprietà
A={numeri naturali dispari e minori di 4}

Estensiva o per elencazione
B={1,3}

Grafica *(diagrammi di Eulero Venn)*

Rappresentazione

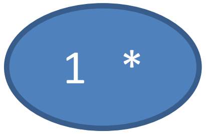
Intensiva

A={numeri naturali pari}

Estensiva

B={ 1, *, ciao, ♪ }

Grafica



C={alpini morti nella campagna di Russia}

Finito non decidibile

D={soluzioni dell'eq. $x^8+x^6+x-3=0$}

Finito e decidibile

Appartenenza

Un oggetto è elemento di un insieme se la proprietà che caratterizza l'insieme è vera per quell'oggetto.

$$a \in A$$

Altrimenti l'oggetto non appartiene all'insieme

$$a \notin A$$

Cardinalità

Si dice cardinalità di un insieme la quantità dei suoi elementi.

#A

A={numeri naturali maggiori di 4 e minori di 7}

#A = 2

Uguaglianza

Due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi.

$$\mathbf{A=B \Leftrightarrow \forall x,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)}$$

A={insieme dei numeri naturali minori di 5}

$B=\{x | x \in N \wedge x < 5\}$

Insieme vuoto

Si dice **insieme vuoto** l'insieme che non contiene alcun elemento.

$$\varnothing=\{x \mid x \in A \wedge x \notin A\}$$

A = {numeri dispari minori di 1} = $\varnothing$

L'insieme vuoto ha cardinalità 0

Sottoinsiemi

Un insieme *A* è **sottoinsieme** di un insieme B se tutti gli elementi di *A* sono anche elementi di B.

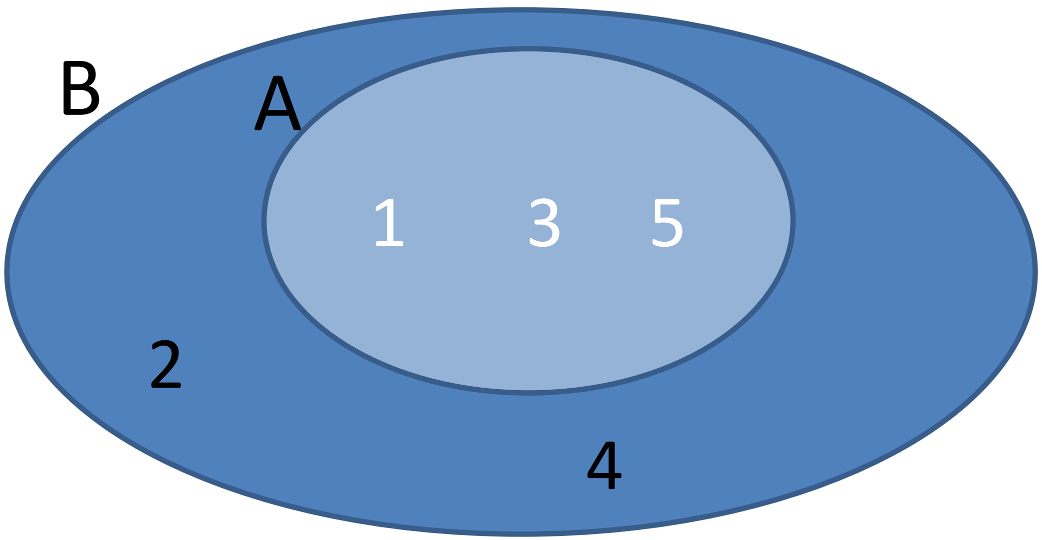
$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Sottoinsiemi propri

Sottoinsiemi impropri: *A*, ∅

Sottoinsiemi

A={numeri naturali dispari minori di 6}
B={numeri naturali minori di 6}



Sottoinsiemi

Tassonomie

specie ⊂ genere ⊂ famiglia ⊂ ordine ⊂ classe ⊂ philum ⊂ regno

Insieme delle parti

L'insieme delle parti di un insieme *A* è un insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi, propri ed impropri dell'insieme *A*.

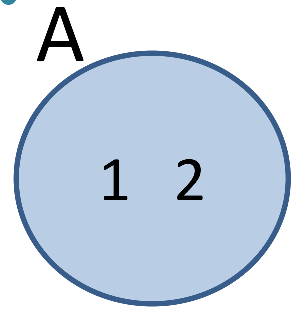
$$P(A)=\{B \mid B \subseteq A\}$$

Se l'insieme *A* ha cardinalità n allora l'insieme delle parti avrà cardinalità 2^n.

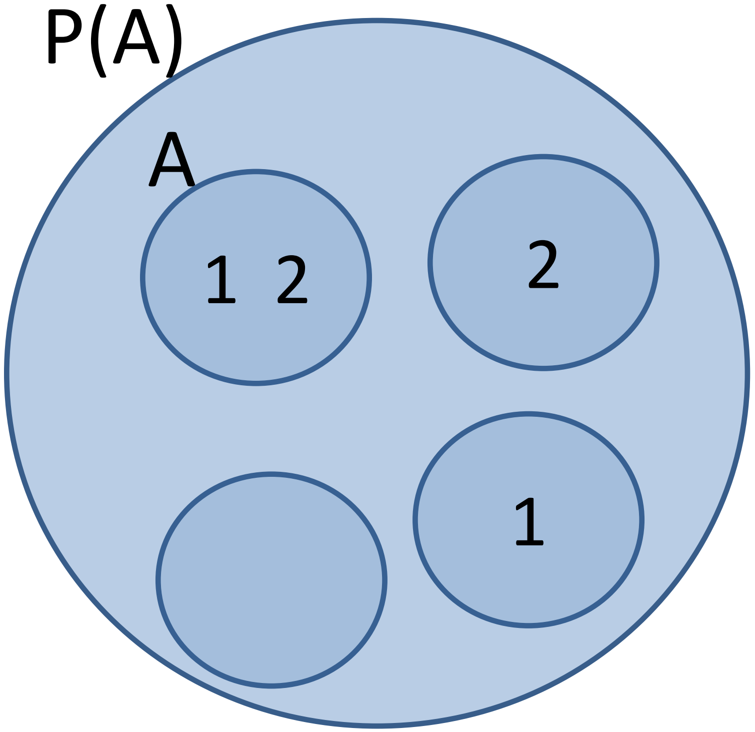
(Si dimostra per induzione)

Insieme delle parti

$A=\{1,2\}$



$P(A)=\{A,\varnothing,\{1\},\{2\}\}$



Unione

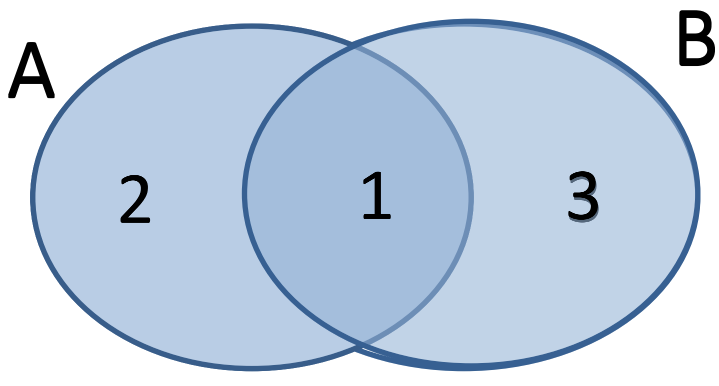
Si dice **insieme unione** degli insiemi *A* e B un insieme *C* avente come elementi tutti gli elementi di *A* o di B, presi una sola volta.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Unione

A={numeri naturali minori di 3}
B={numeri naturali dispari minori di 4}

$C=A \cup B$={numeri naturali minori di 4}



Unione

$A \cup B = B \cup A$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cup A = A$

$A \cup \emptyset = A$

Intersezione

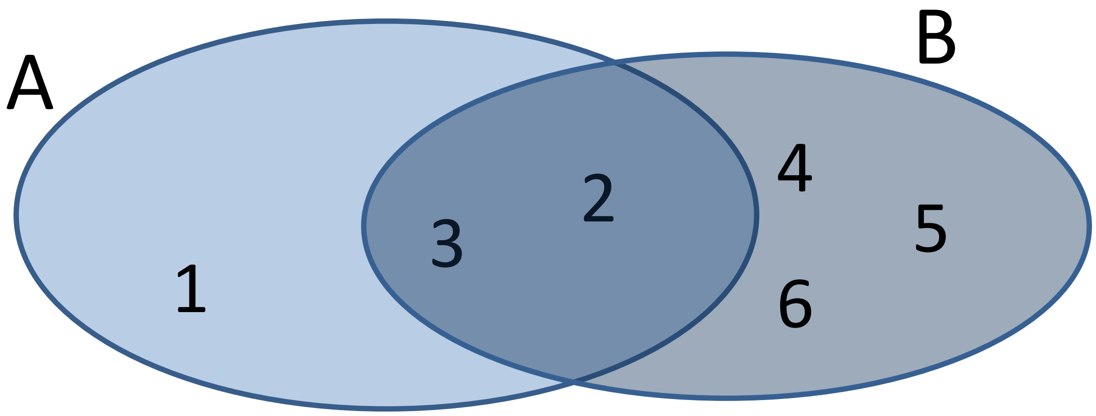
Si dice insieme **intersezione** degli insiemi *A* e B un insieme *C* avente come elementi tutti gli elementi di *A* <u>e</u> di B.

$$\mathbf{A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}}$$

Intersezione

A={numeri naturali minori di 4}
B={numeri naturali compresi tra 1 e 7}

C= A$\cap$B={numeri naturali compresi tra 1 e 4}



Intersezione

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Differenza

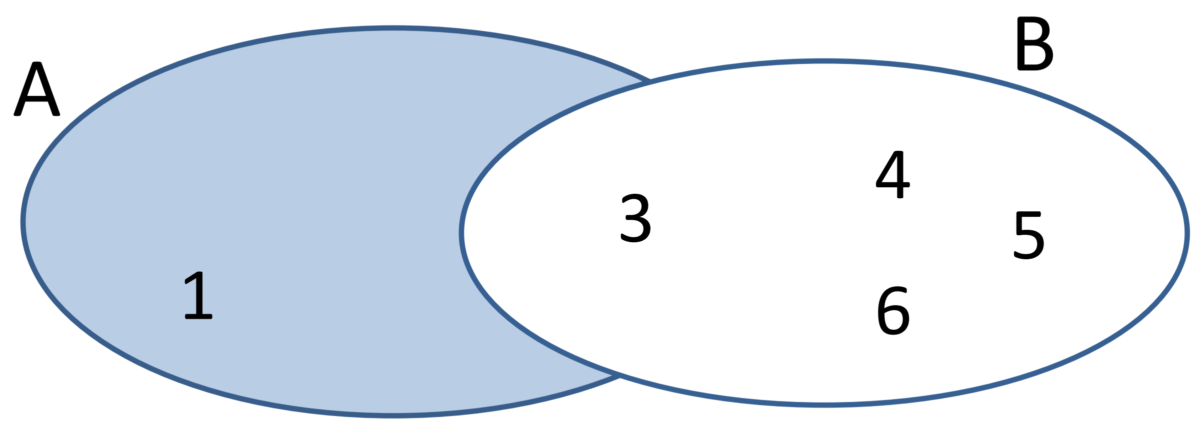
Si dice insieme **differenza** degli insiemi *A* e B un insieme *C* avente come elementi tutti gli elementi di *A* che non appartengano a B.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$

Differenza

A={numeri naturali dispari minori di 4}
B={numeri naturali compresi tra 2 e 7}

$C = A \setminus B = \{1\}$



Complementazione

Se B è un sottoinsieme di *A* l'operazione di differenza prende il nome di complementazione ma si definisce allo stesso modo.

Si dice **complementare** di B rispetto ad *A* l'insieme degli elementi di *A* che non appartengono a B.

Complementazione

L'insieme rispetto al quale stiamo effettuando l'operazione di complementazione prende il nome di insieme universo U.

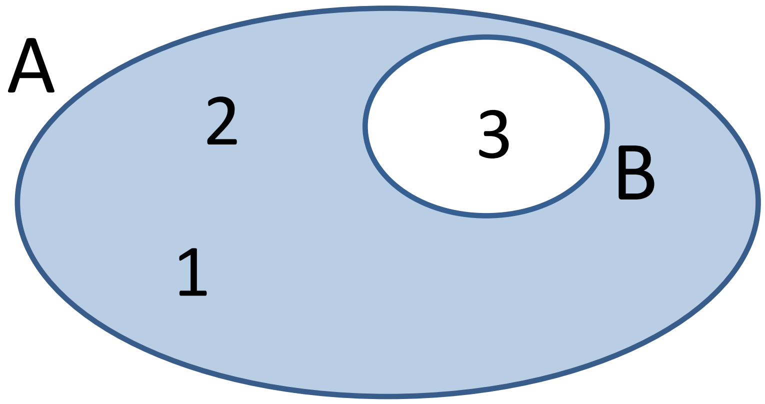
Attenzione: E' sempre necessario precisare rispetto a quale insieme universo stiamo effettuando la complementazione.

Esempio: $C_R N \neq C_Q N$

Complementazione

A={numeri naturali minori di 4}
B={numeri naturali compresi tra 2 e 4}

$C_A B = \{1,2\}$



Esempio

A={basi azotate del DNA} = {A, C, G, T}
B={basi azotate del RNA} = {A, C, G, U}

$$A \cup B = \{A, C, G, T, U\}$$

$$A \cap B = \{A, C, G\}$$

$A \setminus B = \{T\}$ $B \setminus A = \{U\}$

Il prodotto cartesiano

Si definisce **coppia ordinata** ogni insieme di due elementi in cui si specifica l'ordine con cui compaiono i due oggetti.

$$(a,b)$$

$$\{a,b\}=\{b,a\} \qquad (a,b) \neq (b,a)$$

$$\{a,a\} \qquad (a,a)$$

Il prodotto cartesiano

Il **prodotto cartesiano** *A*x*B* è l'insieme delle coppie ordinate (a,b) con a appartenente ad *A* e b appartenente a B.

$$AXB=\{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

La cardinalità di *A*x*B* è il prodotto delle cardinalità di *A* e di B

Il prodotto cartesiano

Rappresentazione

$A=\{1\}$ $B=\{*,c\}$

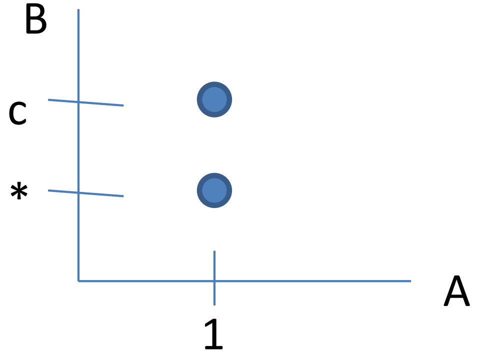
Per elencazione

$A\times B=\{(1,*),(1,c)\}$

Tabella doppia entrata

A \ B	*	c
1	(1,*)	(1,c)

Rappresentazione cartesiana



Il prodotto cartesiano

Proprietà

$$A \times B \neq B \times A$$

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ $\emptyset \times A = \emptyset$ $A \times \emptyset = \emptyset$

Esercizio

1) Dati gli insiemi

   A = {le lettere della parola rosa}

   B = {*,#,@}

   Determinare il prodotto cartesiano BxA e farne una rappresentazione cartesiana.

2) Dato il seguente prodotto cartesiano

   $L = A \times B = \{(a,1),(b,1)\}$

   determinare gli insiemi A e B

Esercizio

$$A=\{x|x\in N \wedge x^2-x-6=0\}$$

$$B=\{x|x\in Z \wedge (2x-1)(x^2-x-6)=0\}$$

Rappresentare A e B per elencazione.
I due insiemi sono uguali?
A è sottoinsieme di B?
Determinare $P(B)$, $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $A\times B$.
Posso determinare $C_B A$?

Esercizio

- Sia $A = \{n | n \in N \wedge 2n = 8\}$
  Quali sono gli elementi di A?

Fornire una rappresentazione estensiva dei seguenti insiemi:

- B = $\{x | x \in$ N $\wedge$ x < 3}
- C = $\{x |$ "x è una figura geometrica" $\wedge$ "x ha 4 lati"}
- D = $\{n \in$ N: $n \leq 4 \vee 7 < n \leq 12\}$

Esercizio

Dati gli insiemi
$A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{4,7,8,9\}$, $C = \{1\}$

Determinare gli insiemi
$A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$,
$A \setminus B$, $A \setminus C$, $A \setminus A$.

E' presente una relazione di sottoinsieme tra gli insiemi A, B e C?
In caso positivo determinare il complementare del sottoinsieme rispetto al sovrainsieme.