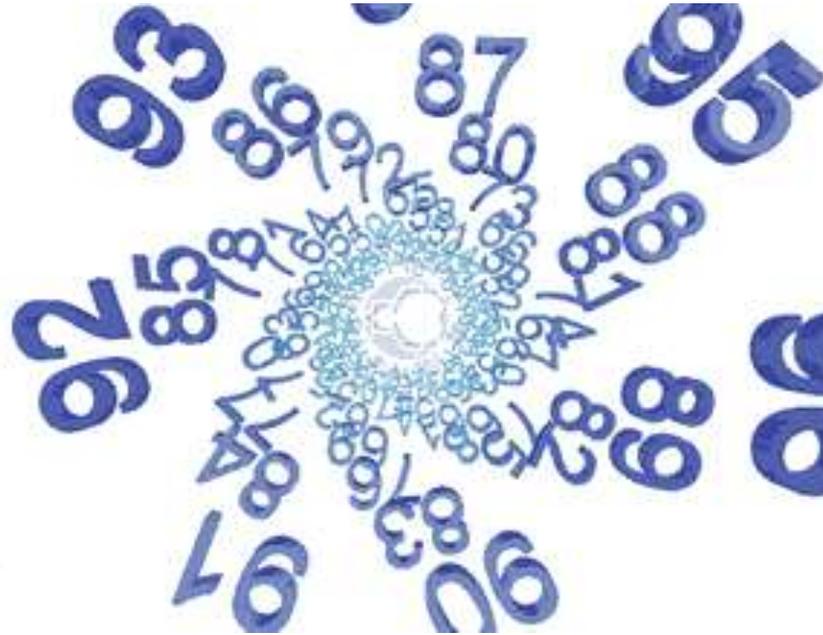


# Insiemi numerici



# I Naturali

I numeri naturali sono quegli oggetti matematici che servono per contare le cose che ci circondano.

0,1,2,3, ... , 9, ...

10 dita  $\rightarrow$  base 10

Sono un insieme ordinato



# Operazioni

- Somma  $a+b$
- Moltiplicazione  $a \times b = \overbrace{a+a+\dots+a}^{b \text{ volte}}$
- Elevamento a potenza  $a^b = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{b \text{ volte}}$

- Sottrazione  $a-b=c \rightarrow a=b+c$   
 $3-2=1$

$$a \geq b$$



# Operazioni e ordinamento

- Somma  $a+b$
- Moltiplicazione  $a \times b$
- Elevamento a potenza  $a^b$

Il risultato è maggiore di ciascuno dei termini dell'operazione

# Operazioni

- Somma  $a+b$
- Moltiplicazione  $a \times b$
- Elevamento a potenza  $a^b$

• Sottrazione  $a-b=c \rightarrow a=b+c$

• Divisione con resto

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cdot & q \\ \hline & r \end{array}$$

$$a \geq b$$

$$\rightarrow a = b \times q + r$$

• Estrazione della radice  ${}^b\sqrt{a} = c \rightarrow a = c^b$

# Operazioni e ordinamento

- Somma  $a+b$
- Moltiplicazione  $a \times b$
- Elevamento a potenza  $a^b$

• Sottrazione  $a-b=c$

• Divisione con resto 
$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cdot & q \\ \hline & r \end{array}$$

• Estrazione della radice  ${}^b\sqrt{a} = c$

$$c \leq a$$

$$q \leq a \text{ e } r \leq b$$

$$c \leq a$$

# Proprietà delle operazioni

## Somma

- Commutativa  $a+b=b+a$
- Associativa  $a+(b+c)=(a+b)+c$
- Esistenza elemento neutro 0  $a+0=a$

## Sottrazione

- ~~Commutativa~~
- ~~Associativa~~  $(7-2)-1 \neq 7-(2-1)$
- Esistenza elemento neutro 0  $a-0=a$

# Proprietà delle operazioni

## Prodotto

- Commutativa  $axb = bxa$
- Associativa  $ax(bxc) = (axb)xc$
- Esistenza elemento neutro 1  $ax1=a$
- $ax0=0$
- Legge di annullamento del prodotto  
 $axb=0 \Leftrightarrow (a=0 \vee b=0)$

## Prodotto e somma

Distributiva  $ax(b+c) = axb + axc$

# Proprietà delle operazioni

## Divisione

~~Commutativa~~

~~Associativa~~  $(8:4):2 \neq 8:(4:2)$

Esistenza elemento neutro 1  $a:1=a$

$0:a=0$   $a:0$  **IMPOSSIBILE**

$0:0$  forma indeterminata

## Divisione e somma

~~Distributiva~~  $a:(b+c) \neq a:b + a:c$

## Divisione e prodotto

~~Commutativa~~  $a:(b \times c) \neq (a:b) \times c$

# Proprietà delle operazioni

## Elevamento a potenza

$$1^n = 1$$

$$0^n = 0$$

$$a^0 = 1$$

$$0^0$$

$$a^b \times a^0 = a^{b+0} = a^b$$

# Proprietà delle operazioni

## Elevamento a potenza

- $a^b \times a^c = a^{b+c}$

- $a^b : a^c = a^{b-c}$

- $(a^b)^c = a^{b \times c}$

- $a^b \times c^b = (a \times c)^b$

- $a^b : c^b = (a : c)^b$

# Esercizi

$$\{[7 - (10:2) + 3 \cdot 7]: 23 + (2 \cdot 5)(3 \cdot 2) - 11\}:[11 - 3 \cdot 2]$$

$$\{[(3^3)^4]^2: (3^5)^4 \cdot 3^3\}^2: \{[(2^2)^3]^2\}^0$$

Ordina e rappresenta i seguenti numeri:

$$\sqrt[3]{27}$$

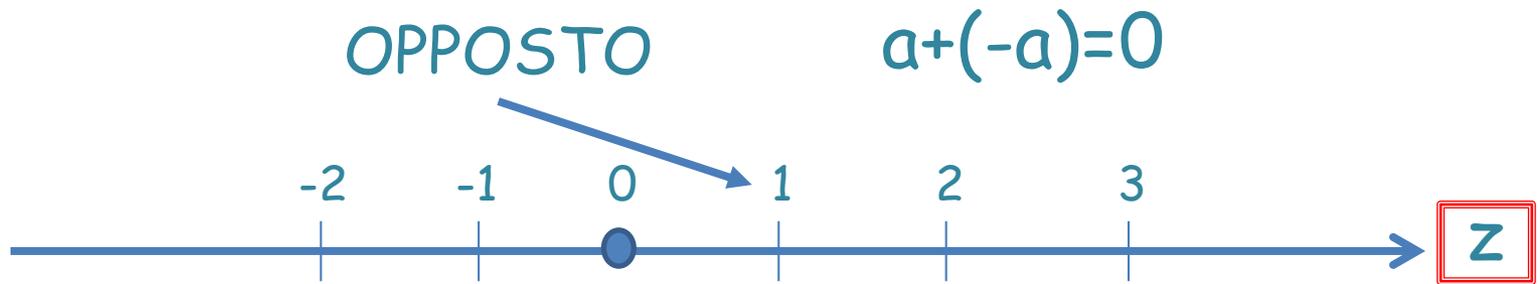
$$2$$

$$\sqrt{25}$$

$$8:2$$

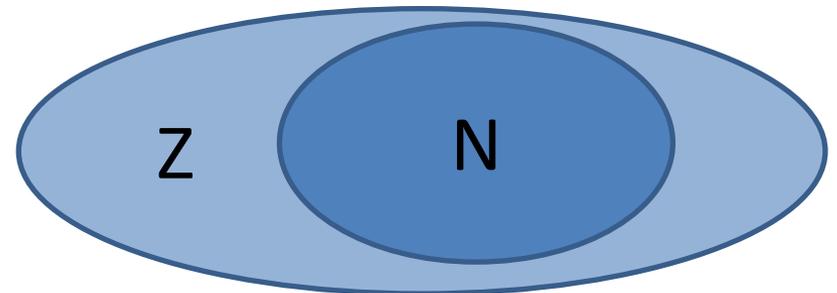
# Gli Interi

I numeri col segno



SEGNO

MODULO



# Valore assoluto

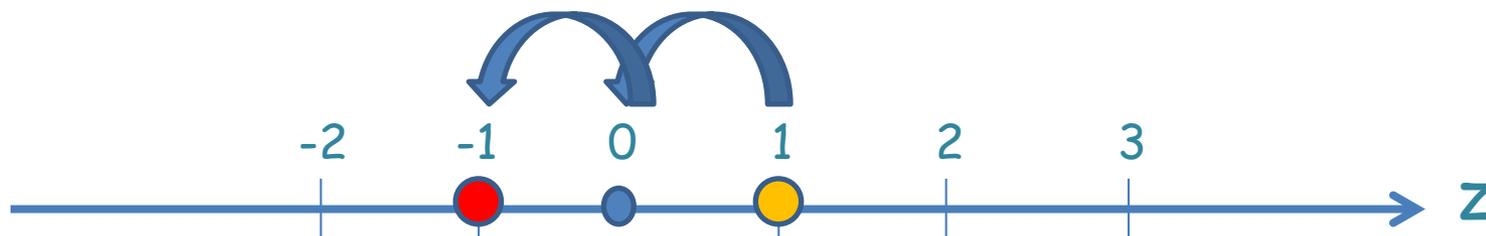
È un operatore che restituisce il modulo di un numero intero.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

# Operazioni

- Somma  $a+b$

$$1+(-2)=1-2=-1$$



- stesso segno: lascio il segno e sommo i moduli
- segno opposto: segno del modulo maggiore e differenza tra i moduli

# Operazioni

- Somma  $a+b$
- Moltiplicazione  $a \times b$

Modulo = prodotto dei moduli

$$+ \times + = +$$

$$+ \times - = -$$

$$- \times + = -$$

$$- \times - = +$$

- Elevamento a potenza  $a^b$ ,  $b > 0$

$$(+a)^b = +a^b$$

$$(-a)^b = +a^b \text{ se } b \text{ è pari}$$

$$(-a)^b = -a^b \text{ se } b \text{ è dispari}$$

# Operazioni

- Sottrazione  $a-b = a+(-b)$

$$a-(-b) = a + (-1) \times (-b) = a+b$$

- Divisione  $a:b$

Modulo = rapporto tra i moduli  
Segno come per il prodotto

- Estrazione della radice,  $b > 0$

$\sqrt[b]{a}$  se  $b$  è pari e  $a \geq 0$

$\sqrt[b]{a}$  se  $b$  è dispari

Radice aritmetica e radice algebrica

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

# Operazioni e ordinamento

- Somma
- Moltiplicazione
- Elevamento a potenza

~~Il risultato è maggiore di ciascuno dei termini dell'operazione~~

- Sottrazione
- Divisione

~~Il risultato è minore del sottraendo/dividendo~~

# Proprietà delle operazioni

## Somma

- Esistenza dell'opposto  $a \rightarrow -a \mid a+(-a)=0$

## Elevamento a potenza

### Esponente negativo

$$a^b : a^b = a^{b-b} = a^{b+(-b)} = a^b \times a^{-b}$$

# Proprietà delle operazioni

## Elevamento a potenza

$$a^0=1$$

$$1 = a^b : a^b = a^{b-b} = a^0$$

$$a^b : a^b = a^{b-b} = a^{b+(-b)} = a^b \times a^{-b}$$

# Esercizi

$$(-39)^5 : (+13)^5 + 10^2 - [(-4)^{-2}]^{-2} : (-4)^3 + (-100)^2 : (-10)^2 = \quad [-39]$$

$$(-70)^3 : (-7)^3 + [(-3)^2]^4 : (-3)^3 - 9^3 + (-1)^5 : (-1)^2 - 5^2 - 0^{15} = \quad [+2]$$

$$[(-4)^3]^4 : (-4)^6 : (-4)^5 + 4^1 - 4^0 + 0^4 - (-4)^5 : (-4)^4 \cdot (-4) + 4^1 = \quad [-13]$$

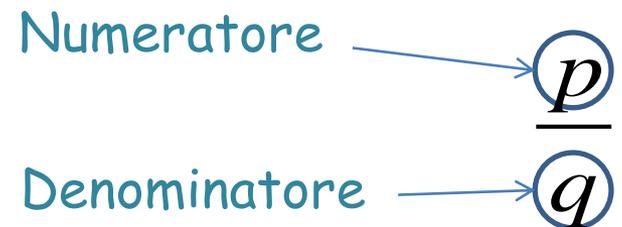
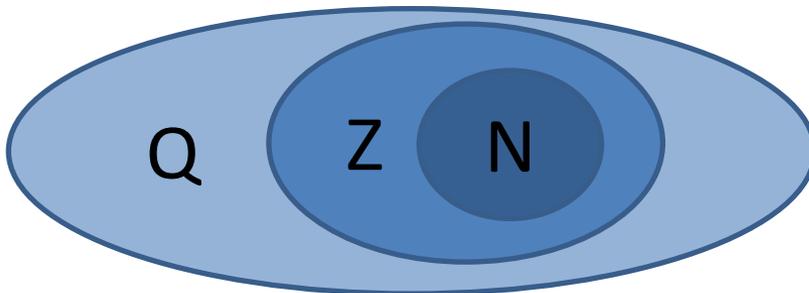
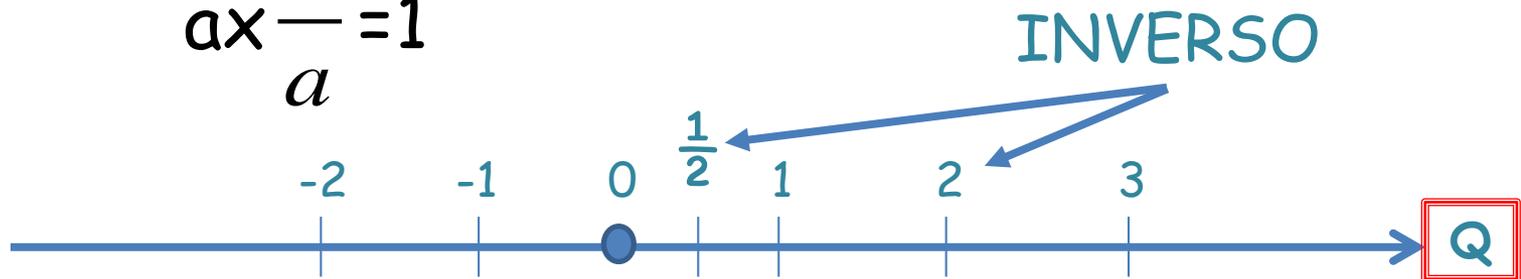
$$[(3\sqrt{2} + \sqrt{3}) \times (\sqrt{3} + \sqrt{2}) : \sqrt{6}] (5 - 2\sqrt{6}) - 1$$

$$(\sqrt{6})^3 \cdot (\sqrt[3]{2})^6; \quad (\sqrt[4]{24})^7 : (\sqrt[3]{24})^5 \quad \left[ \sqrt{2^7 \cdot 3^3}; \sqrt[12]{24} \right]$$

# I razionali Q

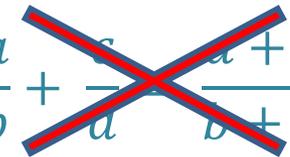
$$\frac{p}{q} \text{ con } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$$

$$ax \frac{1}{a} = 1$$



# Operazioni

## •Somma

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$


$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

**ERRORI:**

$$\frac{\cancel{a} + b}{\cancel{a} + c}$$

$$\frac{5 + 3}{5 + 7} \neq \frac{3}{7}$$

$$\frac{x + \cancel{y}}{a + \cancel{y}}$$

# Operazioni

- Somma
- Moltiplicazione

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

ERRORI:

$$\frac{\cancel{a} + b}{c} \cdot \frac{1}{\cancel{a}}$$

$$\frac{5 + 2}{7} \cdot \frac{1}{5} \neq \frac{2}{7}$$

$$\frac{a}{\cancel{b} + c} \cdot \frac{\cancel{b}}{1}$$

# Operazioni

- Somma
- Moltiplicazione
- Elevamento a potenza

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-n} = \left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{q^n}{p^n}$$

# Elevamento a potenza

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \qquad a = a^1 = a^{\frac{p}{p}} = (a^p)^{\frac{1}{p}}$$

Valido solo per  $a > 0$

$$(-2)^{\frac{6}{6}} = \left\{ (-2)^{\frac{1}{6}} \right\}^6 = \left( \sqrt[6]{-2} \right)^6 \quad \text{impossibile}$$

$$= \left\{ (-2)^6 \right\}^{\frac{1}{6}} = (64)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

# Operazioni

- Sottrazione
- Divisione
- Estrazione della radice,  $b > 0$

$$\sqrt[b]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[b]{p}}{\sqrt[b]{q}}$$

# Proprietà delle operazioni

## Somma

- Esistenza dell'opposto

$$\frac{p}{q} \rightarrow -\frac{p}{q}$$

## Prodotto

- Esistenza dell'inverso

$$\frac{p}{q} \rightarrow \frac{q}{p}$$

# Esercizi

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2\right]}{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[\left(2 - \frac{4}{3}\right)^3 : \left(\frac{10}{3} - 1\right)^2\right]}$$

$$\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}\right]^{-2} : \left(-\frac{4}{5}\right)^{10} : \left(+\frac{1}{2}\right)^5 - \left(-\frac{1}{8}\right) - \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 =$$

$$\left[+\frac{9}{64}\right]$$

$$\left[\left(-\frac{7}{4}\right)^5 : \left(-\frac{7}{4}\right)^7 - \frac{15}{49}\right] + \left(+\frac{1}{7} - \frac{1}{49}\right) - \left(-\frac{4}{7}\right) : \left(+\frac{16}{7}\right) - \left(+\frac{28}{11}\right)^{-1} =$$

$$[0]$$

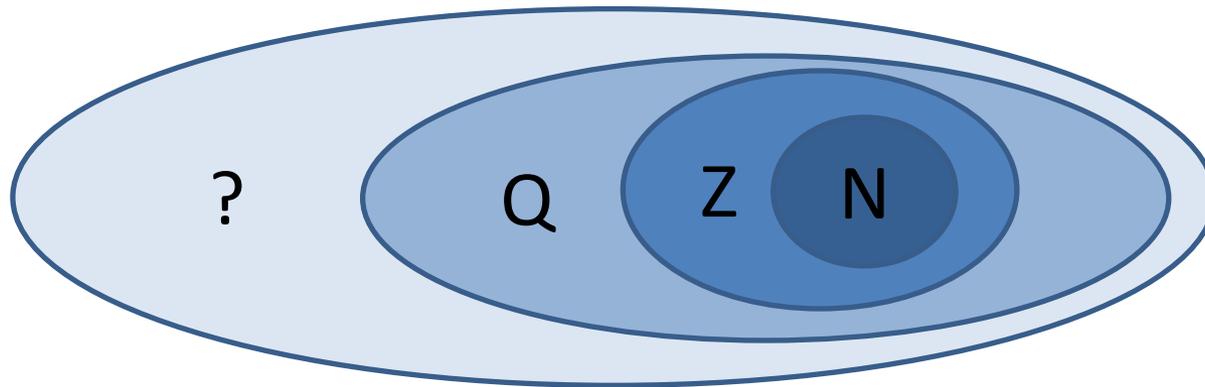
$$\left[\left(-\frac{4}{5}\right)^2\right]^{-3} : \left(-\frac{5}{4}\right)^4 \cdot \left(-\frac{4}{15}\right) + \left[\left(1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{5}{12}\right)\right] + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 1 =$$

$$\left[-\frac{17}{16}\right]$$

# Gli irrazionali

Esistono?

0,01 001 0001 00001 ...



$\sqrt{2}$

$\sin 1$

$e$

$\ln 5$

$\pi$

# Gli irrazionali

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Hp:  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \iff \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , con  $p$  e  $q$  primi tra loro



$$2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2$$

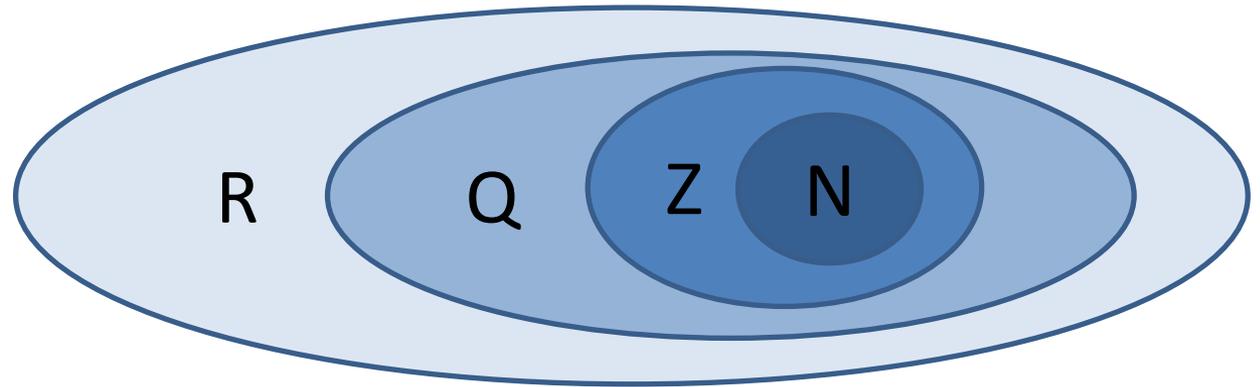
$p$  pari  $\rightarrow p=2r$

$$q^2 = 2r^2$$

$q$  pari

$p$  e  $q$  non sono primi tra loro

I Reali



# I Reali

Assiomi relativi alle operazioni  $+$   $\times$

- Commutativa
- Associativa
- Distributiva
- Esistenza elemento neutro
- Esistenza dell'opposto
- Esistenza dell'inverso

# I Reali

## Assiomi relativi all'ordinamento $\leq$

- Dicotomia  $a \leq b$  oppure  $b \leq a$
- Asimmetria se  $a \leq b$  e  $b \leq a$  allora  $a=b$
- Se  $a \leq b$  allora  $a+c \leq b+c$
- Se  $0 \leq a$  e  $0 \leq b$  allora  $0 \leq a+b$  e  $0 \leq a \times b$

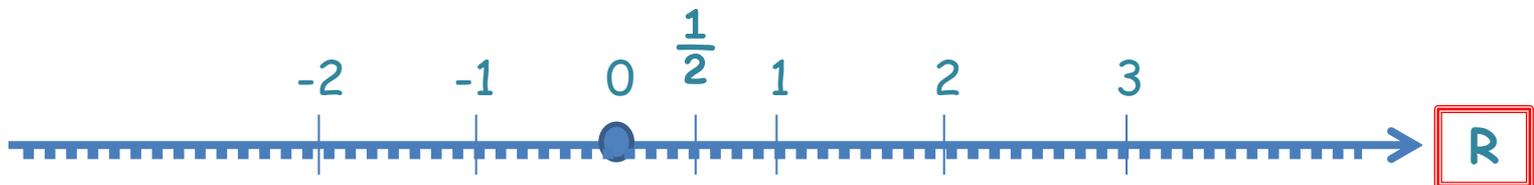
Il quadrato di un  
numero positivo è  
positivo

# I Reali

## Assioma di completezza

Siano  $A$  e  $B$  due sottoinsiemi dei Reali tali che  $a \leq b$  per ogni  $a \in A$  e  $b \in B$  allora esiste almeno un  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $a \leq c \leq b$

## Rappresentazione grafica



# I razionali non soddisfano l'assioma di completezza

Siano  $A$  e  $B$  due sottoinsiemi di  $\mathbb{Q}$  tali che  $a \leq b$  per ogni  $a \in A$  e  $b \in B$  allora esiste almeno un  $c \in \mathbb{Q}$  tale che  $a \leq c \leq b$

$$A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 \leq 2\}$$

$$B = \{b \in \mathbb{Q} \mid b^2 \geq 2\}$$

$$c^2 = 2 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

# Legge di annullamento del prodotto

$$a \times b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \vee b = 0$$

- $a \times 0 = 0$

$$a + a \times 0 = a \times (1 + 0) = a \times 1 = a$$

- Se  $a \times b = 0$  e  $a \neq 0$  allora  $b = 0$

$$b = b \times 1 = b \times (a \times a^{-1}) = (b \times a) \times a^{-1} = 0 \times a^{-1} = 0$$

# Regole dei segni

$$+ \times + = +$$

dagli assiomi

$$+ \times - = -$$

$$0 = ax0 = ax(b-b) = axb + ax(-b)$$

$$- \times - = +$$

$$0 = (-a)x0 = (-a)x(b-b) = -axb + (-a)x(-b)$$

# Approssimazione dei numeri reali

	$\pi$	
3		4
3,1		3,2
3,14		3,15
...		...

**Attenzione:** Il numero 3,14 e 3,140 sono approssimazioni diverse dello stesso numero.

# Potenze ad esponente reale

$\pi$

3

4

3,1

3,2

3,14

3,15

...

...

$2^\pi$

8

9

8,8

8,9

8,82

8,83

...

...

# Esercizi

- Dire se ha senso definire  $\left(\frac{1}{2}\right)^x$   $2^{-x}$   $(-32)^x$   $\forall x \in R$
  - Dire per quali valori di  $k$  sono calcolabili,  $\forall x \in R$ ,  
 $(k - 1)^{-2x}$   $(-2k + 1)^{3x}$   $(k^2 - 2k + 2)^{3x}$   $(2 - k^2)^{-x}$
- Sol:  $k > 1$ ,  $k < \frac{1}{2}$ ,  $\forall k \in R$ ,  $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$

# Operazioni e ordinamento

- Somma e sottrazione mantengono l'ordine
- Moltiplicazione e divisione
  - $a > 0 \rightarrow$  mantiene
  - $a < 0 \rightarrow$  inverte
- Passaggio all'opposto inverte
- Passaggio all'inverso
  - segno concorde  $\rightarrow$  inverte
  - segni discordi  $\rightarrow$  mantiene

# Esercizi

Ordina e rappresenta i seguenti numeri:

- $\sqrt[3]{27}$       2       $\sqrt{25}$       8:2
- $\sqrt{3}$        $-1 + \sqrt{3}$        $\frac{2}{3}$        $\frac{3}{2}$
- Le soluzioni dell'eq.  $x^2 + x - 1 = 0$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{3}$

# Il logaritmo

Dato  $a^x = y$ , il logaritmo in base  $a$  di  $y$  è l'esponente che deve avere  $a$  per ottenere  $y$ .

$$x = \log_a y$$

↑  
base  
10, e

←  
argomento

$$a > 0 \quad \text{e} \quad a \neq 1$$

$$y > 0$$

$$\left(\frac{7}{8}\right)^x = 5$$

$$x = \log_{\frac{7}{8}} 5$$

# Esercizi

$$y = \log_3 9$$

$$y=2$$

$$y = \log_3 \frac{1}{9}$$

$$y=-2$$

$$y = \log_2 1$$

$$y=0$$

$$y = \log_2 2$$

$$y=1$$

$$y = \log_2(-2)$$

impossibile

$$y = \log_0 4$$

# Esercizi

$$\log_3 x = 2$$

$$\log_x 81 = 4$$

$$\log_{\frac{3}{2}} x = -1$$

$$\log_x 8 = -1$$

$$\log_{\frac{3}{2}} x = \frac{2}{3}$$

$$\log_x \frac{1}{169} = 2$$

$$\log_5 x = 0$$

$$\log_x \sqrt[5]{49} = \frac{2}{5}$$