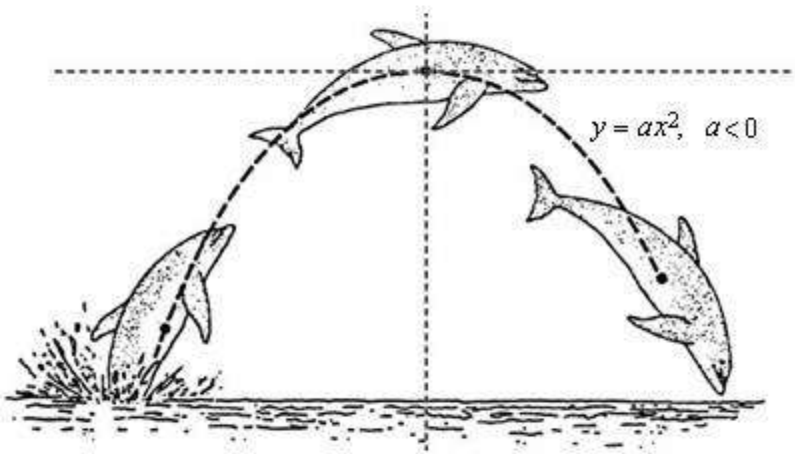
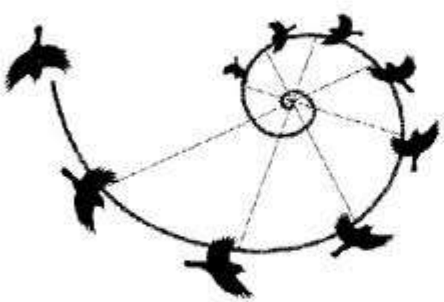
Funzioni Reali





Modello di un fenomeno

Un modello è una costruzione ideale basata su alcune caratteristiche essenziali del fenomeno, dette variabili.

Un modello è ovviamente una approssimazione del fenomeno che nella realtà può essere molto complesso.

Modello di un fenomeno

Dall'analisi del fenomeno si individuano:

- le caratteristiche (variabili) che ricorrono sempre e che quindi caratterizzano il fenomeno
- le eventuali relazioni tra di esse.

Le variabili possono essere

- *Quantitative: descrivono quantità misurabili attraverso numeri reali e opportune unità di misura*
- *Qualitative: altrimenti*

Funzioni

Una **funzione** di A in B è una relazione che ad ogni elemento del primo insieme A associa uno ed un solo elemento del secondo insieme B.

L'insieme A si chiama **dominio** della funzione.
L'insieme B si chiama **codominio** della funzione.

Funzioni

Analitiche

Razionali intere
Razionali fratte
Irrazionali
Trascendenti: logaritmiche, esponenziali, trigonometriche
Valore assoluto
A gradini

Empiriche

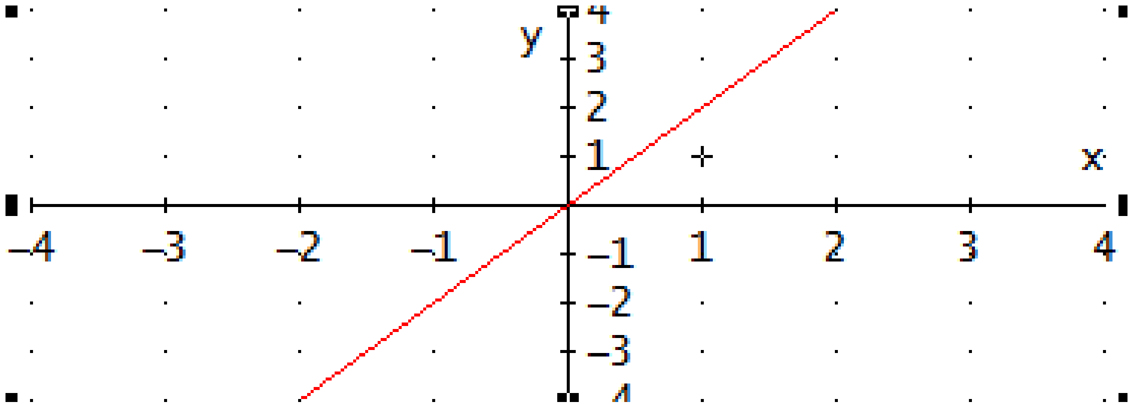
Grafico di funzione

Si definisce grafico di una funzione f
$\{(x,y) \mid x \in A \wedge y=f(x) \in B\} \subseteq \mathbf{A \times B}$

f: R → R
x ⇝ y = 2x

grafico di f: $\{(x,2x) \mid x \in R\}$

Rappresentazione cartesiana



Somma di funzioni

Siano date 2 funzioni f e g così definite

$$f: A \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x)$$

$$g: A \to R \qquad x \rightsquigarrow g(x)$$

Si definisce funzione somma di f e g la funzione $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$$f+g : A \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x)+g(x)$$

Somma di funzioni

Siano date 2 funzioni f e g così definite

$$f: A \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x)$$

$$g: B \to R \qquad x \rightsquigarrow g(x)$$

Si definisce funzione somma di f e g la funzione $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$$f+g : A \cap B \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x)+g(x)$$

Somma di funzioni

Siano date 2 funzioni f e g così definite

$$f: R \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x)=x+4$$

$$g: R \to R \qquad x \rightsquigarrow g(x)=3x-2$$

La funzione somma f+g sarà definita come:

$$f+g : R \to R$$

$$x \rightsquigarrow f(x)+g(x) = (x+4)+(3x-2) = 4x+2$$

Differenza di funzioni

Siano date 2 funzioni f e g così definite

$$f: A \rightarrow R \qquad\qquad g: A \rightarrow R$$
$$x \rightsquigarrow f(x) \qquad\qquad x \rightsquigarrow g(x)$$

Si definisce funzione differenza di f e g la funzione $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$

$$f-g : A \rightarrow R$$
$$x \rightsquigarrow f(x)-g(x)$$

Prodotto di funzioni

Siano date 2 funzioni f e g così definite

$$f: A \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x)$$

$$g: A \to R \qquad x \rightsquigarrow g(x)$$

Si definisce funzione prodotto di f e g la funzione $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$f \cdot g : A \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x) \cdot g(x)$$

Rapporto di funzioni

Siano date 2 funzioni f e g così definite

$f: A \rightarrow R$
$x \rightsquigarrow f(x)$

$g: A \rightarrow R$
$x \rightsquigarrow g(x)$

Si definisce funzione rapporto di f e g la funzione $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$

$f/g : A \setminus \{x \in A \mid g(x)=0\} \rightarrow R$
$x \rightsquigarrow f(x)/g(x)$

Esercizi

Sia $A=\{1,2,3\}$ e siano f e g due funzioni così definite

$$f: A \to \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow 2x \qquad\qquad g: A \to \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow 3-x$$

Determinare l'espressione di $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e f/g.
Calcolare le precedenti funzioni in $x=2$.

Determinazione del dominio

Il Dominio è l'insieme dei valori che possono essere assunti dalla variabile indipendente.

Le limitazioni possono derivare

dalla coerenza della legge col fenomeno

Es. Legge di Stevino

$p=\rho g h$ con $h \geq 0$

da motivazioni matematiche.

Es. $\sqrt{x+2}$

Valida per $x>-2$

Determinazione del dominio

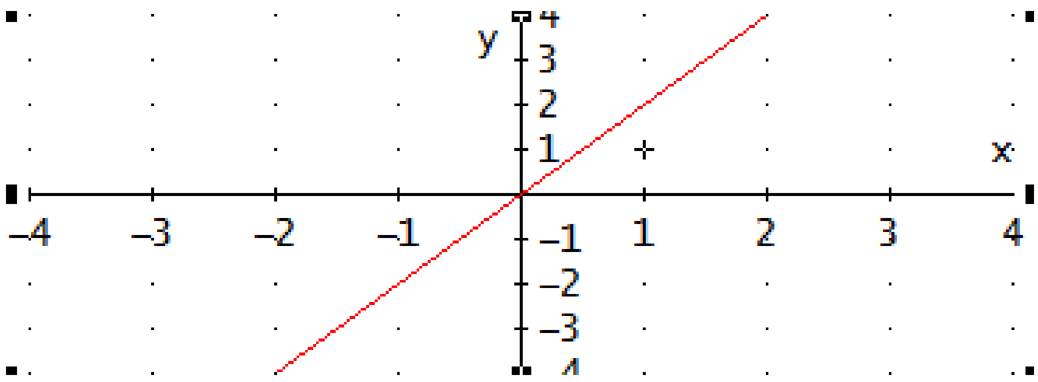
Razionali intere → polinomi

Dominio: R

Funzioni lineari Rette

$y = mx$

$y = mx+q$



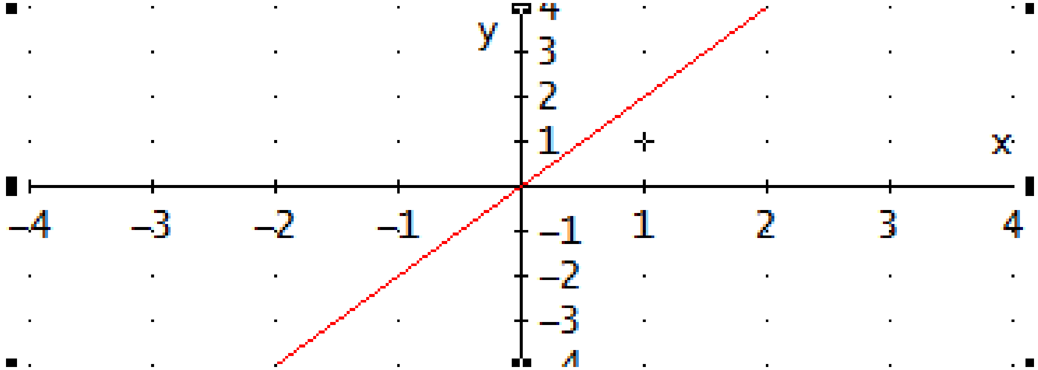
Determinazione del dominio

Due grandezze sono direttamente proporzionali se il loro rapporto è costante.

Retta per l'origine

y = mx

$$\frac{y}{x} = m$$



Determinazione del dominio

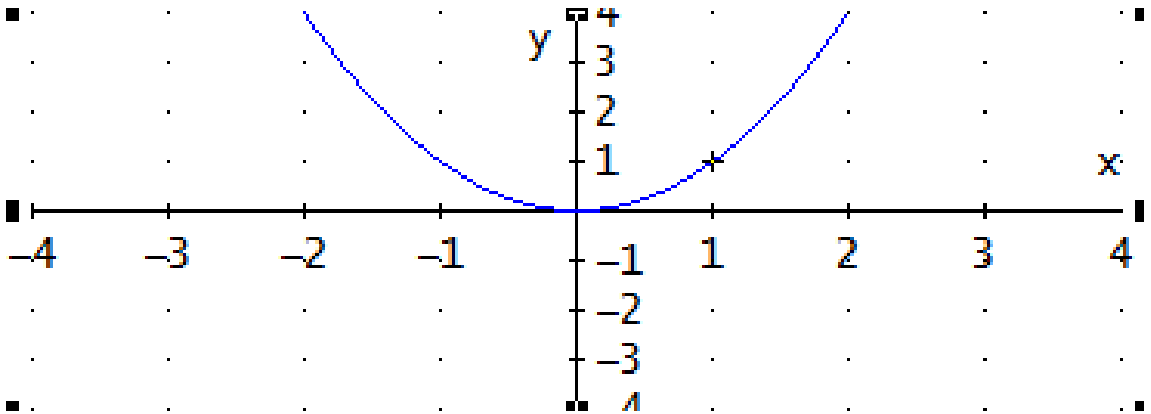
Razionali intere → polinomi

Dominio: R

Parabole

$y = ax^2+bx+c$

$y = ax^2$

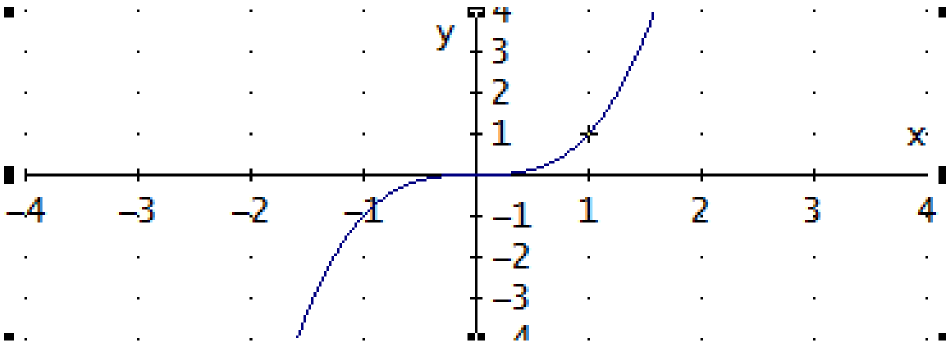


Determinazione del dominio

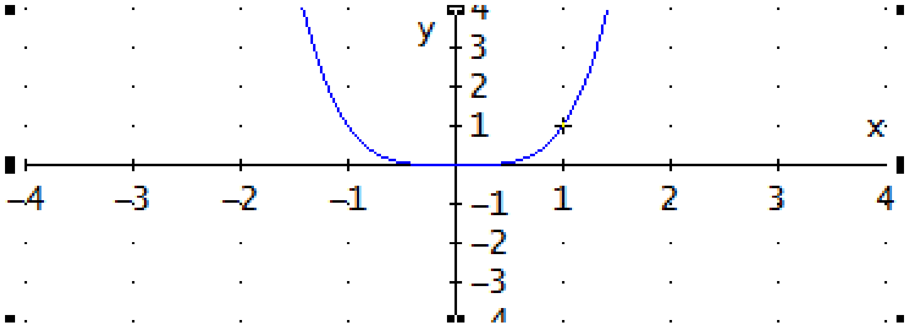
Razionali intere → polinomi

Dominio: R

$y = x^3$



$y = x^4$

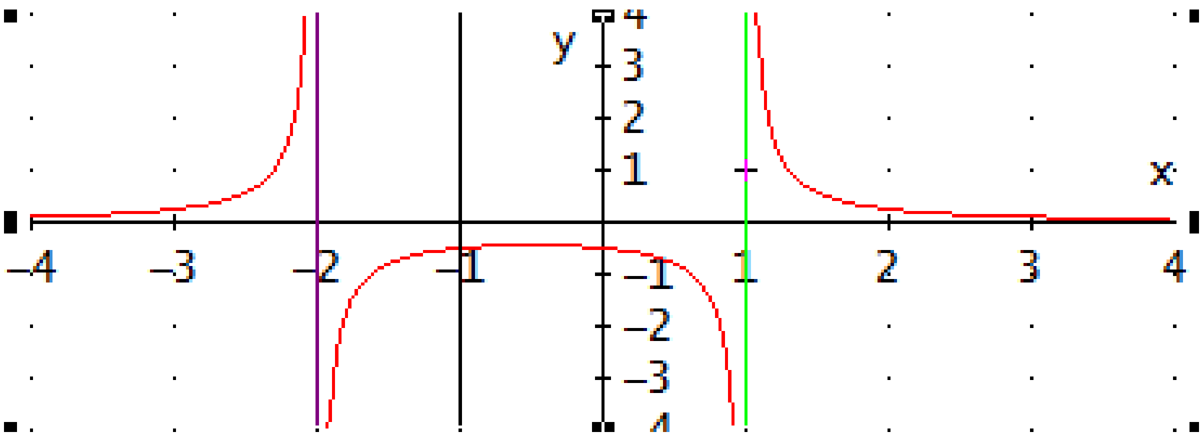


Determinazione del dominio

Razionali fratte

Dominio: R\{punti che annullano il denominatore}

$$y = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$



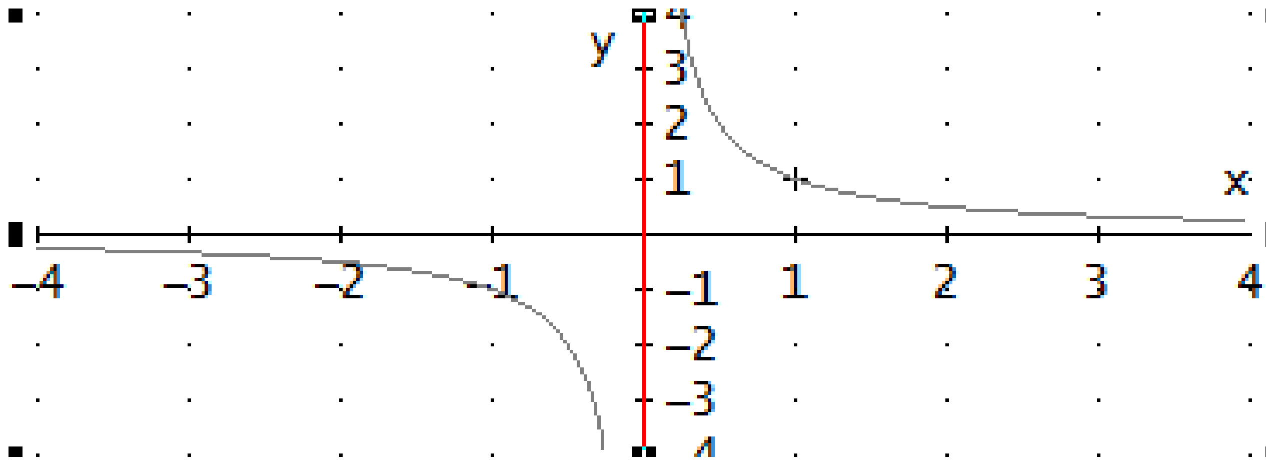
Determinazione del dominio

Due grandezze sono inversamente proporzionali se il loro prodotto è costante.

Iperbole equilatera

$$y = \frac{1}{x}$$

$y \cdot x = m$



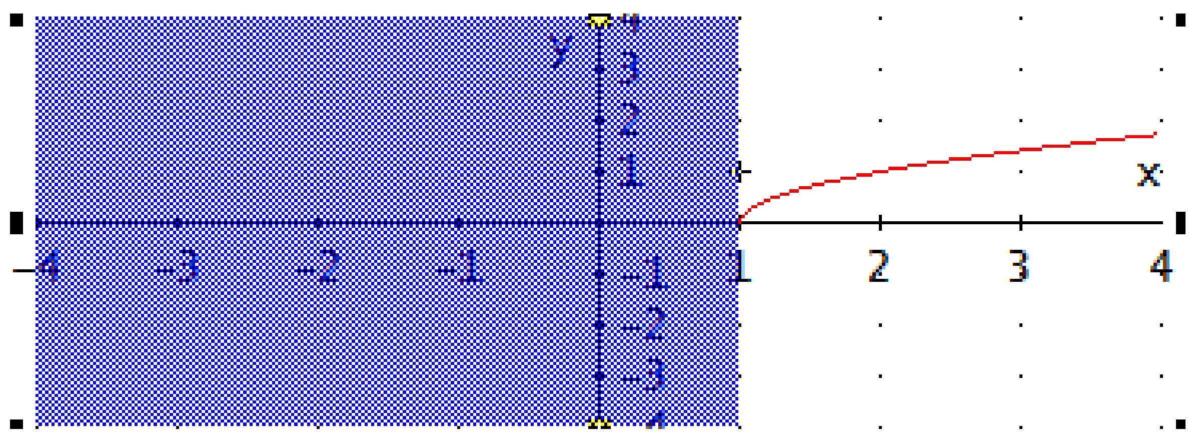
Determinazione del dominio

Irrazionali → radici

Radici di indice pari

Dominio: { R | l'argomento della radice ≥ 0}

$$y = \sqrt{x-1}$$



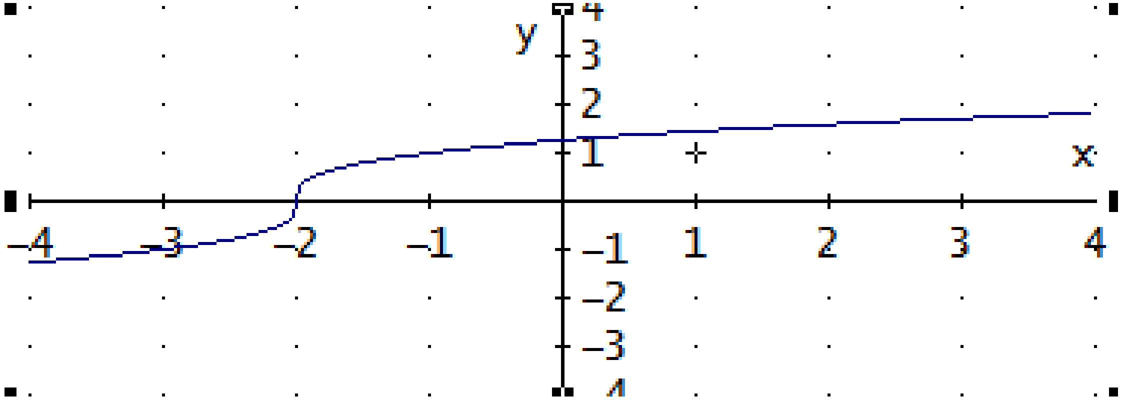
Determinazione del dominio

Irrazionali → radici

Radici di indice dispari

Dominio: R

$$y = \sqrt[3]{x+2}$$

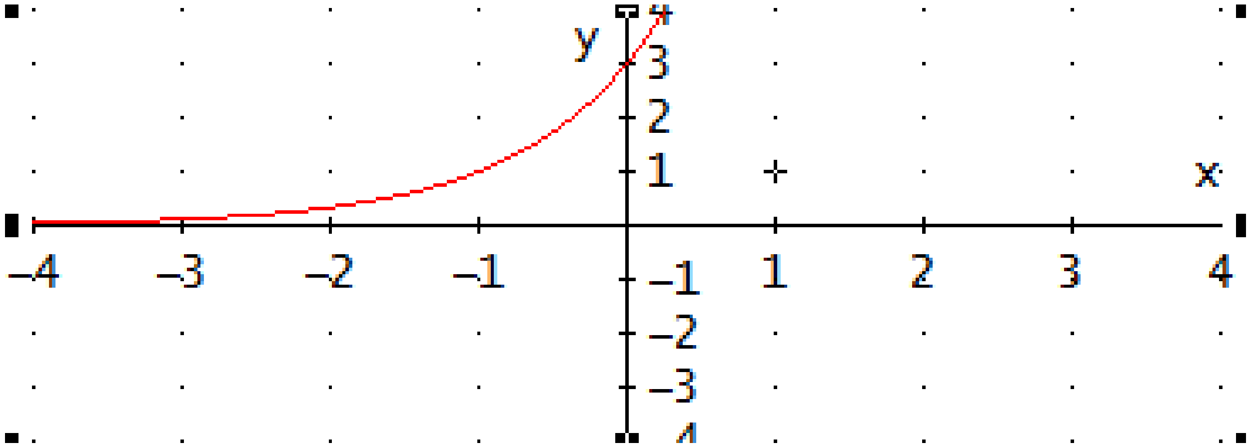


Determinazione del dominio

Esponenziali

Dominio: R

$$y = 3^{x+1}$$

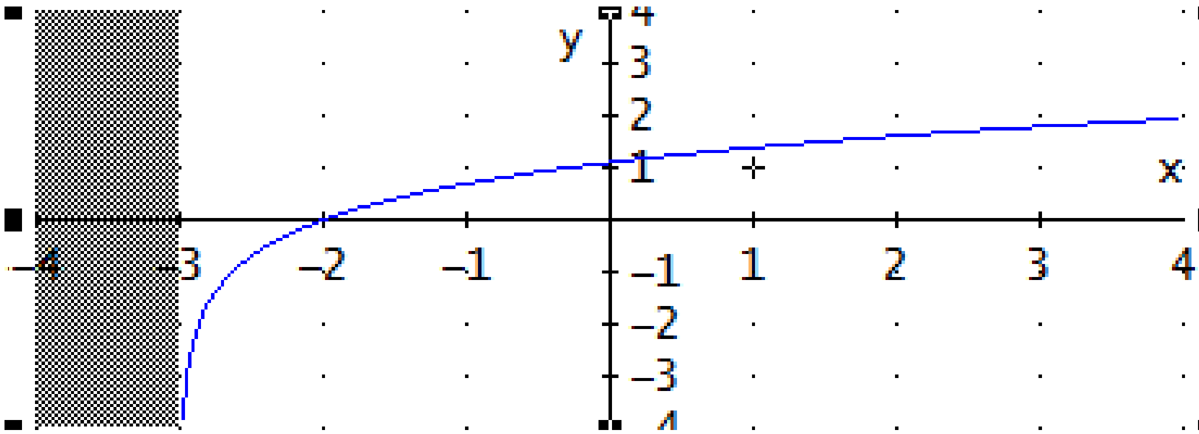


Determinazione del dominio

Logaritmi

Dominio: {R | argomento del logaritmo > 0}

$$y = \ln(x+3)$$

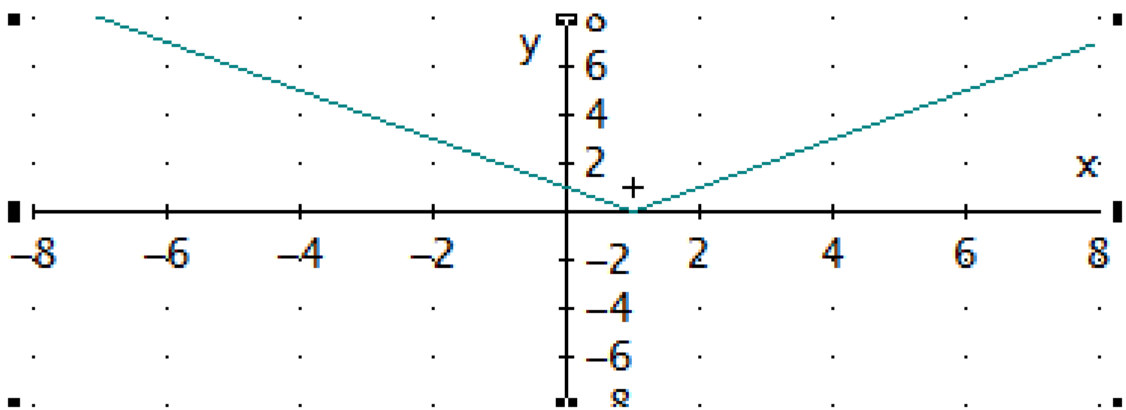


Determinazione del dominio

Valore assoluto

$$y = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$

Dominio: R



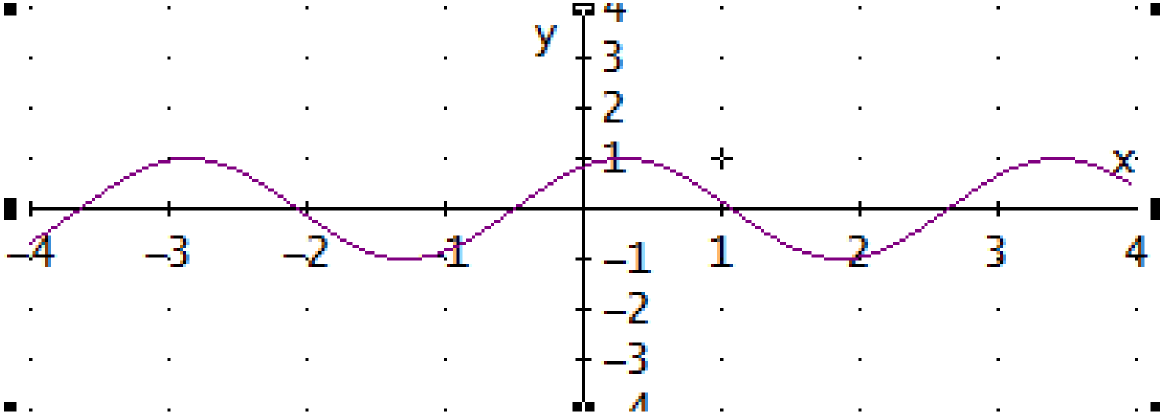
Determinazione del dominio

Trigonometriche

Seno

Dominio: R

$$y = \sin(2x+1)$$



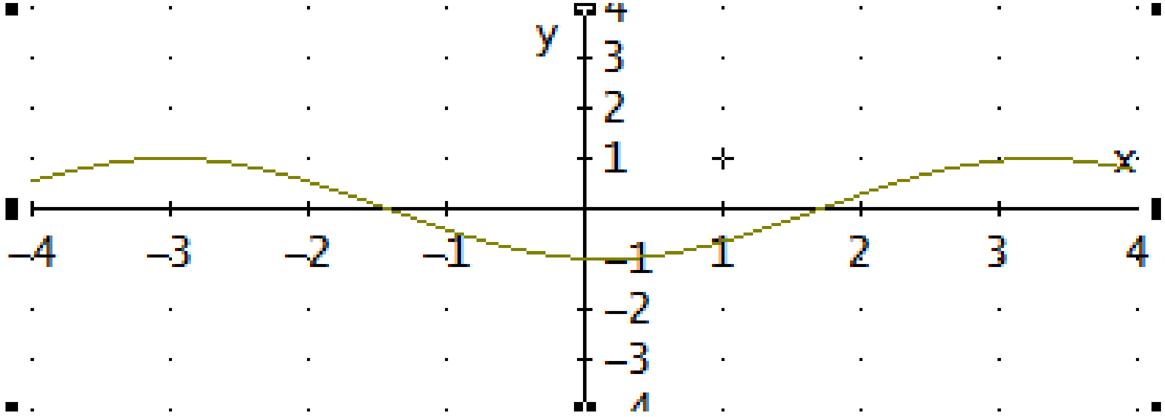
Determinazione del dominio

Trigonometriche

Coseno

Dominio: R

$$y = \cos(x+3)$$



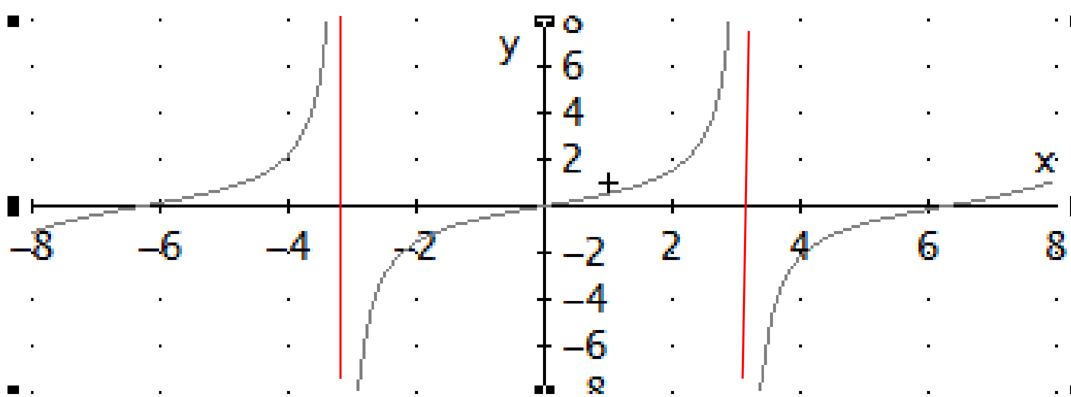
Determinazione del dominio

Trigonometriche

Tangente

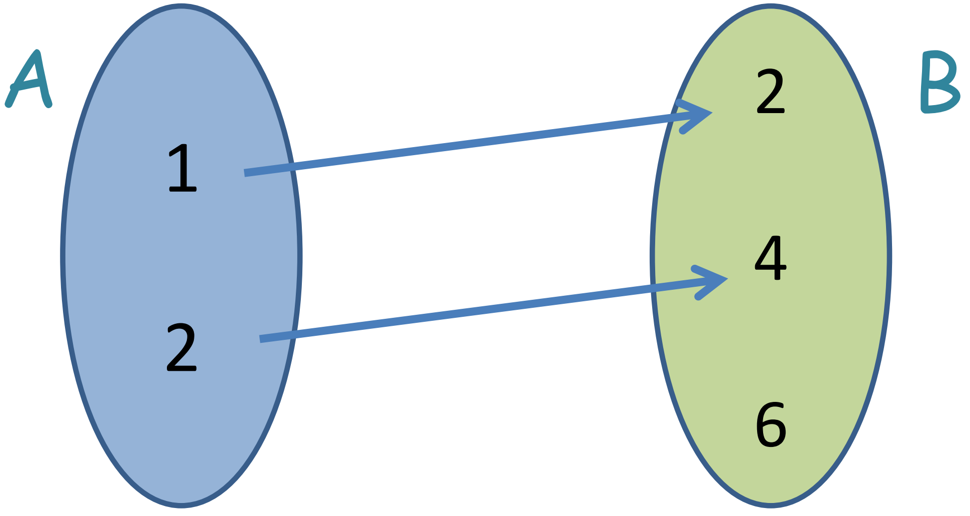
Dominio: {R | l'argomento ≠ π/2 + kπ}

$$y = \tan\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$$



Funzioni limitate

Una funzione $f{:}A \rightarrow B$ si dice limitata se Im (A) è un insieme limitato.



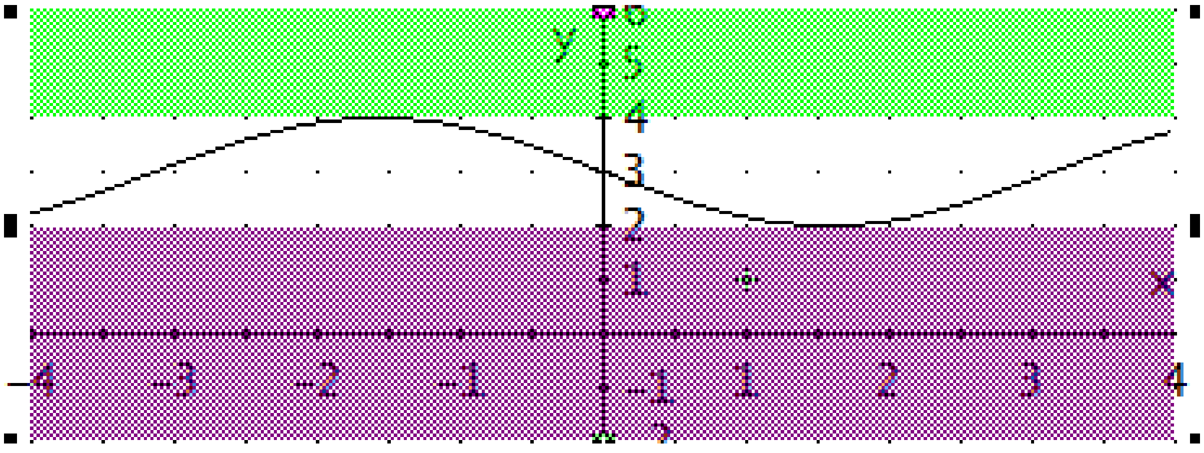
Dominio: A
Codominio: B
Immagine di A: $\{2,4\}$

Funzioni limitate

Se Im (A) è un insieme limitato allora ammette estremo superiore e/o estremo inferiore.

f: R → R
x ⤳ y = f(x)=3-sinx

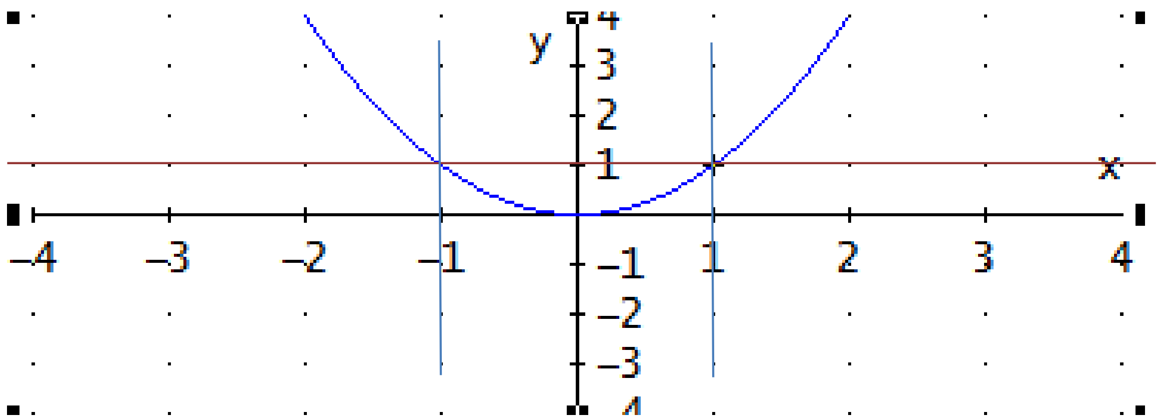
Im(D)=[2,4]



Funzioni pari

Una funzione si dice pari se $\forall x \in \mathbf{D}\ f(x)=f(-x)$.

$y = ax^2$

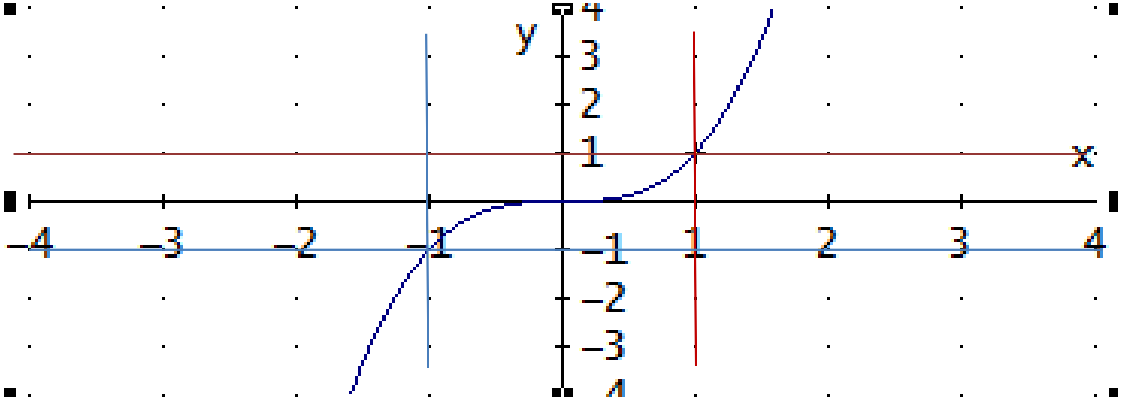


Le funzioni pari sono simmetriche rispetto all'asse delle ordinate.

Funzioni dispari

Una funzione si dice dispari se $\forall x \in D$ $f(x)=-f(-x)$.

$y = ax^3$

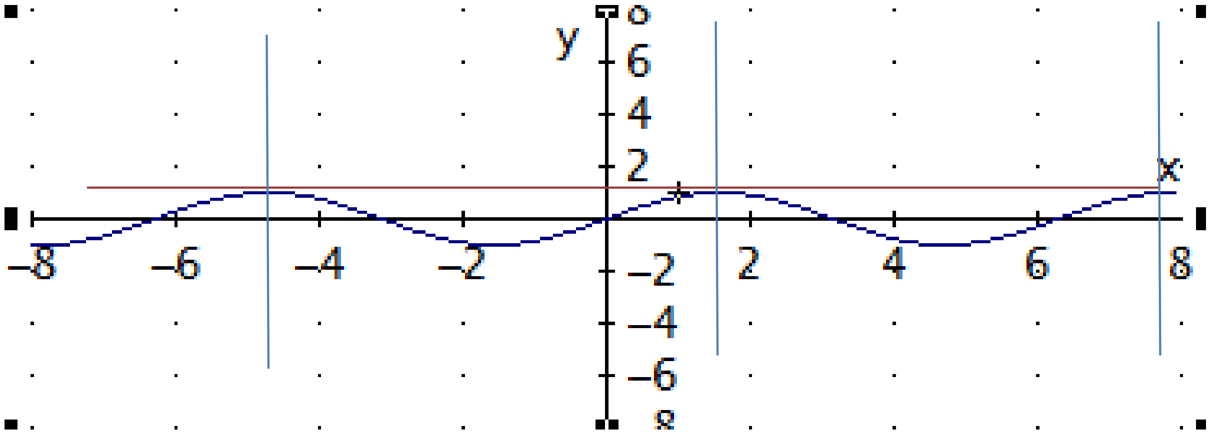


Le funzioni dispari sono simmetriche rispetto all'origine.

Funzioni periodiche

Una funzione si dice periodica di periodo T se $f(x)=f(x+kT)$.

$y = \sin x$



$$y = e^{\sin x}$$

$$y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$T=2\pi$

Esercizi

Si consideri la funzione

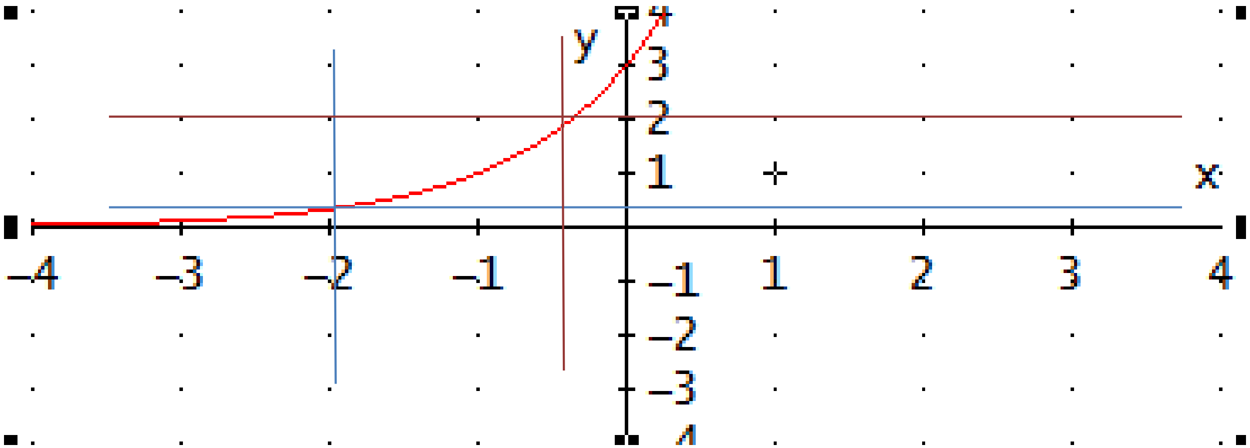
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow \cos x + x^2$$

Stabilire se la funzione è pari, dispari, periodica.

Funzione crescente

Una funzione si dice crescente se $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$$y = 3^{x+1}$$

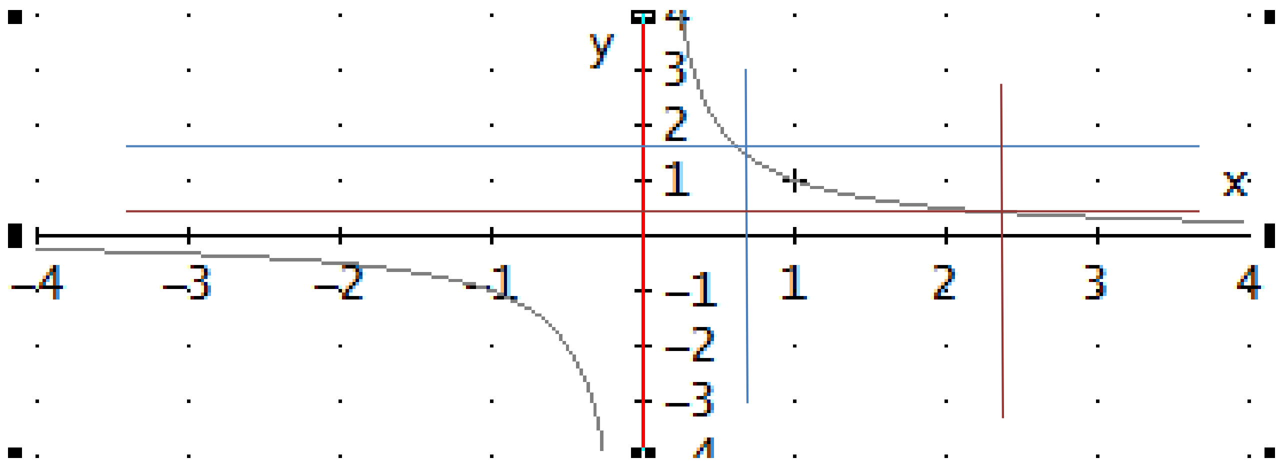


Funzione decrescente

Una funzione si dice decrescente se $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{D}$,

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$y = \frac{1}{x}$$



Funzioni monotòne

Una funzione si dice monotòna in un intervallo $I \subset D$ se è sempre crescente o decrescente in I.

Una funzione si dice monotòna se è sempre crescente o decrescente in D.

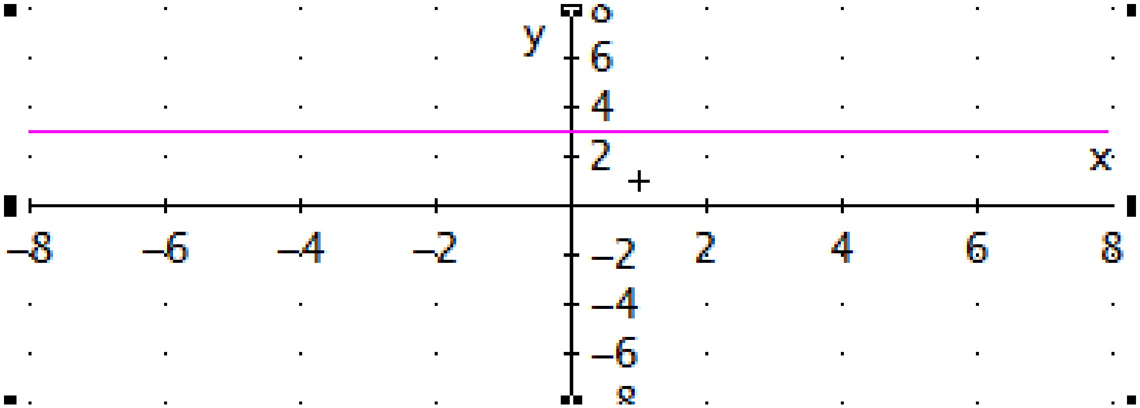
Funzioni monotòne

Una funzione si dice costante in un intervallo $I \subset D$ se $f(x)=c$, $\forall x \in I$, $c \in R$.

Una funzione si dice costante se $f(x)=c$, $\forall x \in D$.

$y=3$

retta parallela all'asse delle x.

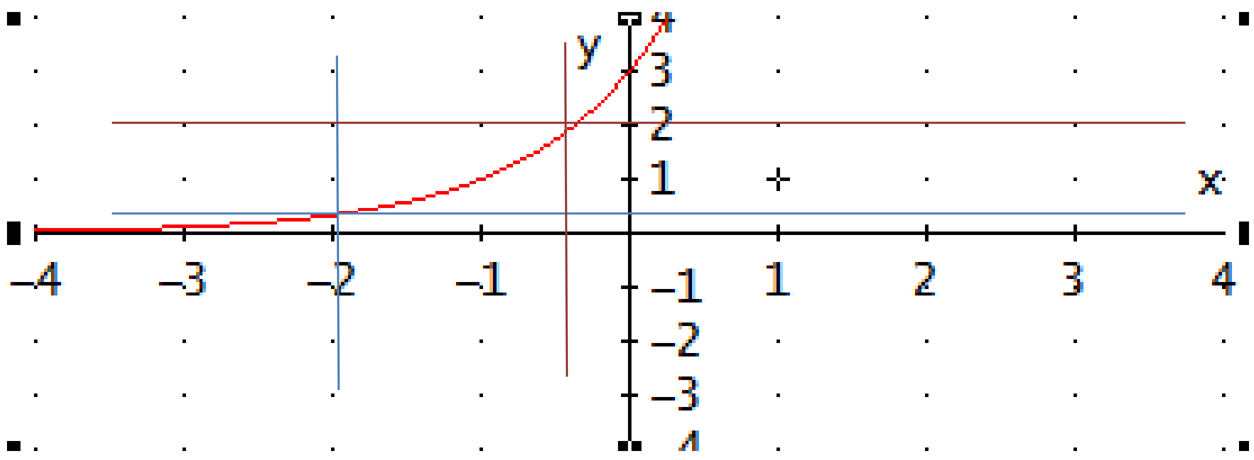


Funzione iniettiva

Una funzione si dice iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{D}$,

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$$y = 3^{x+1}$$



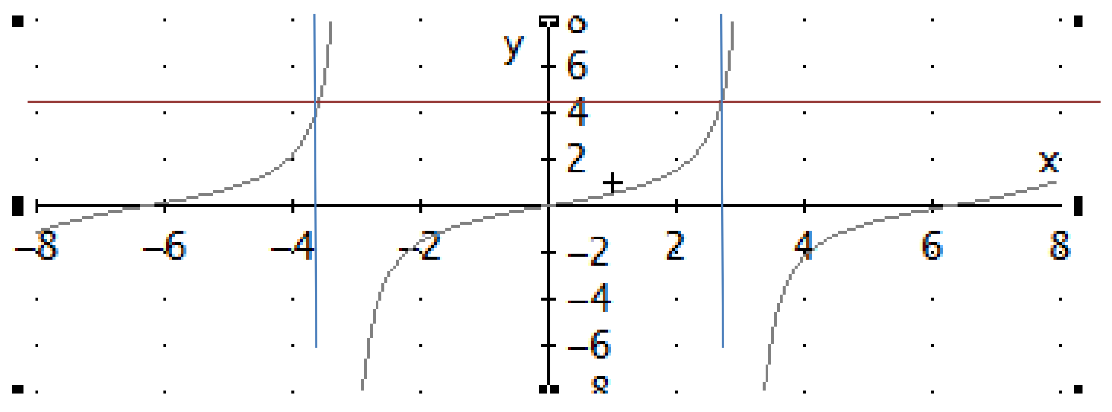
Ogni funzione monotòna in D è iniettiva.

Funzione suriettiva

Una funzione si dice suriettiva se Im(D)=B

Una funzione si dice suriettiva se
$\forall y \in B, \exists x \in D \mid f(x)=y.$

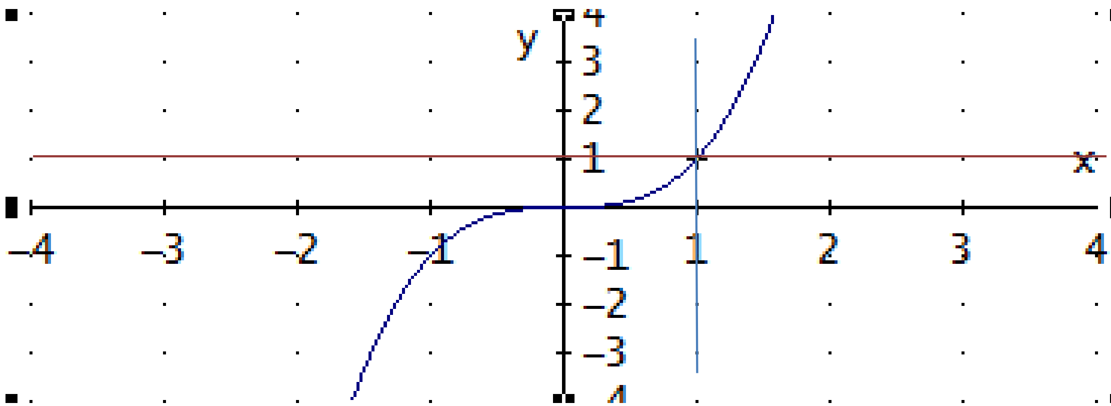
$$y = \tan\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$$



Funzione bigettiva o biunivoca

Una funzione si dice bigettiva se è iniettiva e suriettiva.

$y = x^3$



Una funzione è biunivoca nei suoi intervalli di monotònia.

Funzione identità

La funzione identità è una funzione su un insieme che ad ogni elemento del dominio fa corrispondere l'elemento stesso.

$$i: A \rightarrow A$$
$$x \rightsquigarrow y = f(x) = x$$

$$Im(D) = A$$

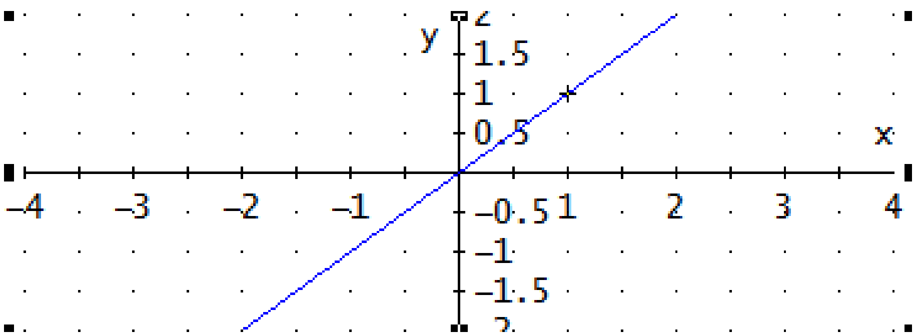
La funzione identità è biunivoca.

Funzione identità

La funzione identità è una funzione su un insieme che ad ogni elemento del dominio fa corrispondere l'elemento stesso.

$$i: R \rightarrow R$$

$$x \rightsquigarrow y = f(x) = x$$



Composizione di funzioni

Siano date 2 funzioni f e g così definite

$f: A \to B$
$x \rightsquigarrow y = f(x)$

$g: B \to C$
$y \rightsquigarrow z = g(y)$

Si definisce funzione composta di f e g la funzione $h = g \circ f$

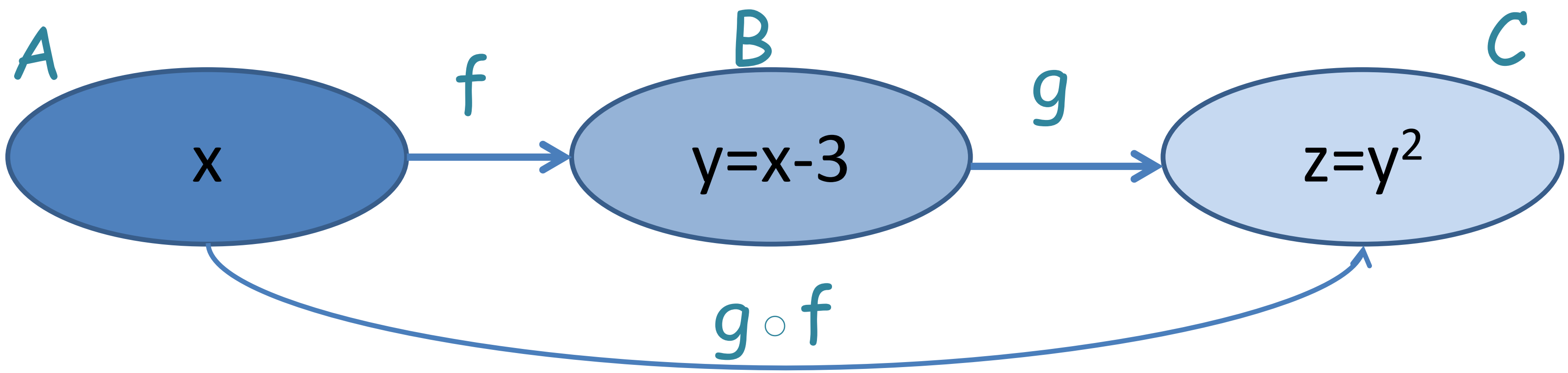
$g \circ f : A \to C$
$x \rightsquigarrow y = g(f(x))$

La composizione non è commutativa

Funzioni composte

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow y = x-3$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$y \rightsquigarrow z = y^2$$



$$g \circ f : A \to C$$
$$x \rightsquigarrow z = g(f(x))=(x-3)^2$$

Funzioni composte

Determinare il dominio delle seguenti funzioni.

$$y = \sqrt{\frac{x}{x-3}}$$

$$y = \ln(\sqrt[3]{x-2})$$

$$y = \tan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Funzione inversa

Sia data una funzione biunivoca

$$f: A \to B$$
$$x \rightsquigarrow y = f(x)$$

Si definisce funzione inversa di f la funzione f^{-1}

$$f^{-1}: B \to A$$
$$y \rightsquigarrow x \mid f(x) = y$$

Anche la funzione inversa è biunivoca e invertibile.

Funzione inversa

N.B: Non confondere f^{-1} con $1/f$

Ogni funzione $f: A \rightarrow B$ iniettiva è invertibile se si riduce il codominio a $Im(A)$.

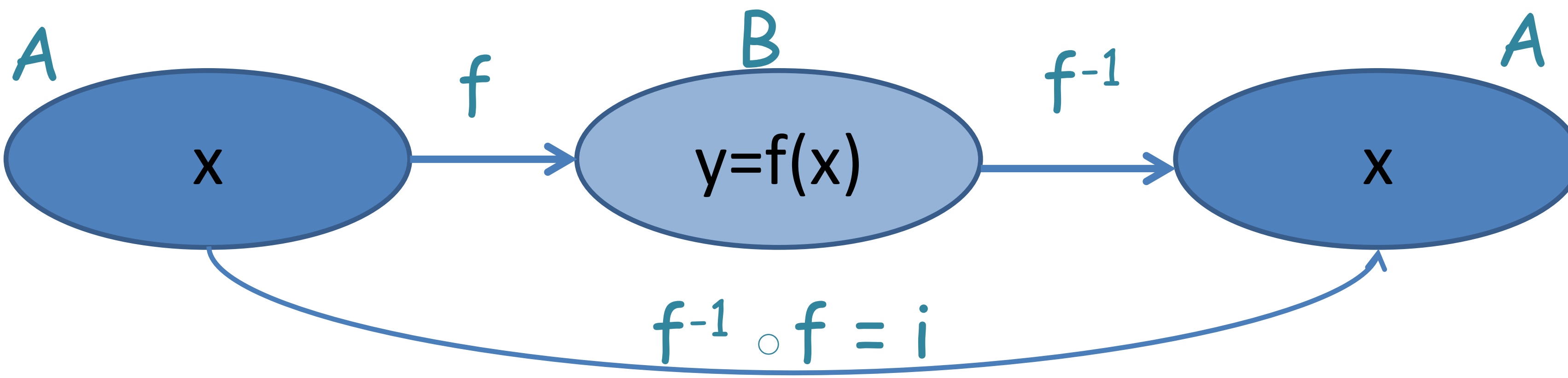
Funzione inversa

$f: A \to B$

$x \rightsquigarrow y = f(x)$

$f^{-1}: B \to A$

$y \rightsquigarrow x \mid f(x) = y$



$i = f^{-1} \circ f : A \to A$

$x \rightsquigarrow f^{-1}(f(x)) = x$

Funzione inversa

$f: A \rightarrow B$ $\quad$ $x \rightsquigarrow y = f(x)$

$f^{-1}: B \rightarrow A$ $\quad$ $y \rightsquigarrow x \mid f(x) = y$

$$\begin{tikzcd}
B & A & B \\
y \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "f \circ f^{-1} = i"'] & x \arrow[r, "f"] & y
\end{tikzcd}$$

$i = f \circ f^{-1} : B \rightarrow B$

$y \rightsquigarrow f\,(f^{-1}(y)) = y$

Funzione inversa

Se si definisce funzione inversa di f la funzione g tale che $g \circ f = i$ allora posso concludere che $(f^{-1})^{-1} = f$.

Funzione inversa

Funzioni lineari Rette

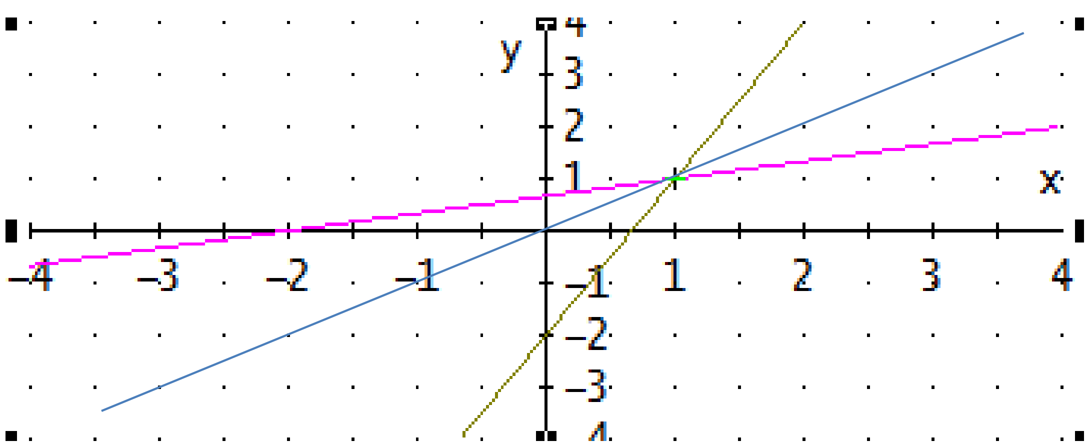
$f: R \rightarrow R$

$x \rightsquigarrow y = f(x) = mx+q$

$f^{-1}: R \rightarrow R$

$y \rightsquigarrow x = (y-q)/m$

$x \qquad y = (x-q)/m$



Funzione inversa

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \rightsquigarrow y = f(x)$

grafico di $f = \{(x, f(x))\}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \rightsquigarrow x = f^{-1}(y)$

$x \mid f(x) = y$

grafico di $f^{-1} = \{(y, f^{-1}(y))\}$
$= \{(f(x), x)\}$

I grafici di una funzione e della sua inversa sono simmetrici rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

Funzione inversa

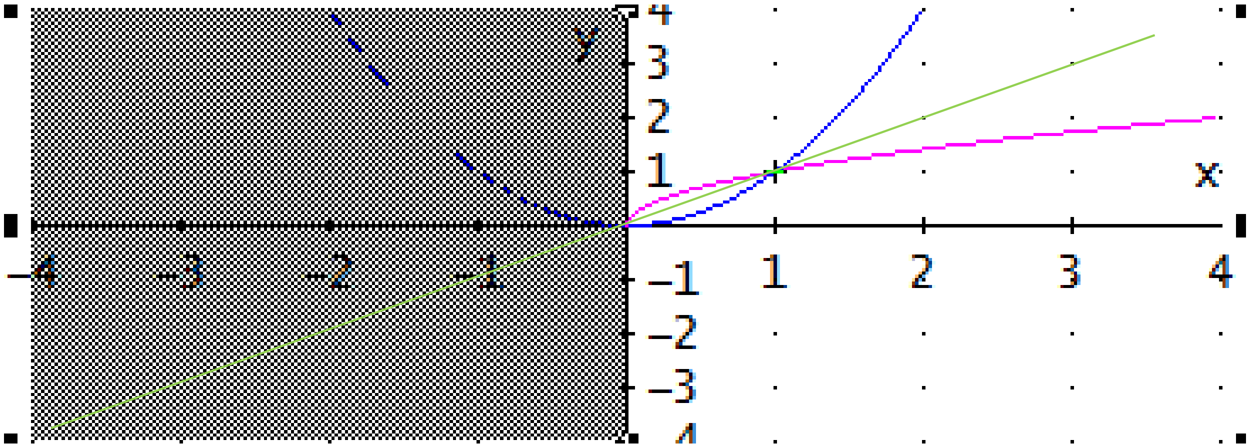
Polinomi di secondo grado

$f: R+ \rightarrow R+$

$x \rightsquigarrow y = x^2$

$f^{-1}: R+ \rightarrow R+$

$y \rightsquigarrow x = \sqrt{y}$



Funzione inversa

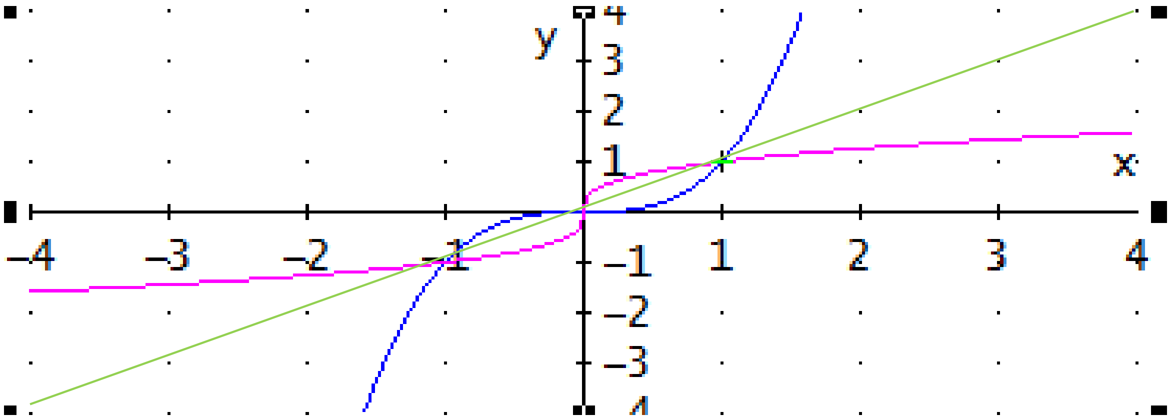
Polinomi di terzo grado

$f: R \to R$

$x \rightsquigarrow y = x^3$

$f^{-1}: R \to R$

$y \rightsquigarrow x = \sqrt[3]{y}$

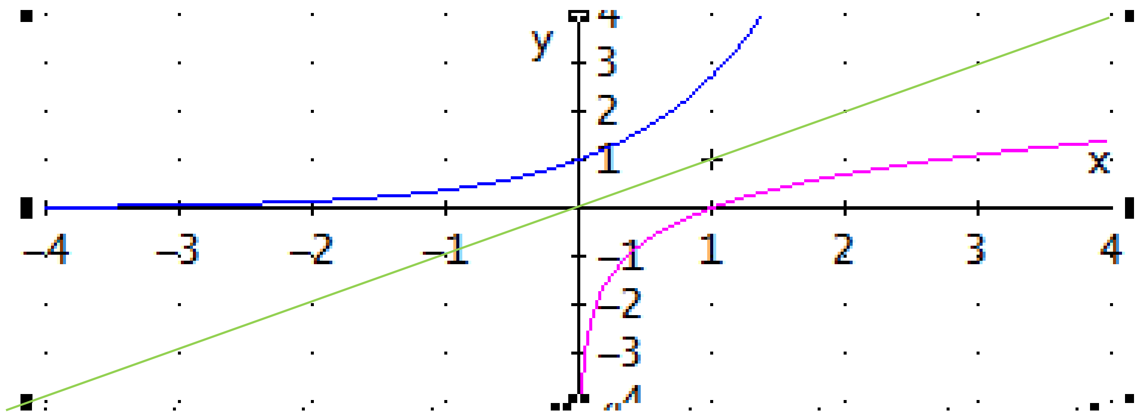


Funzione inversa

Esponenziali

$f: R \to R+\backslash\{0\}$ $f^{-1}: R+\backslash\{0\} \to R$

$x \rightsquigarrow y = e^x$ $y \rightsquigarrow x = \ln y$

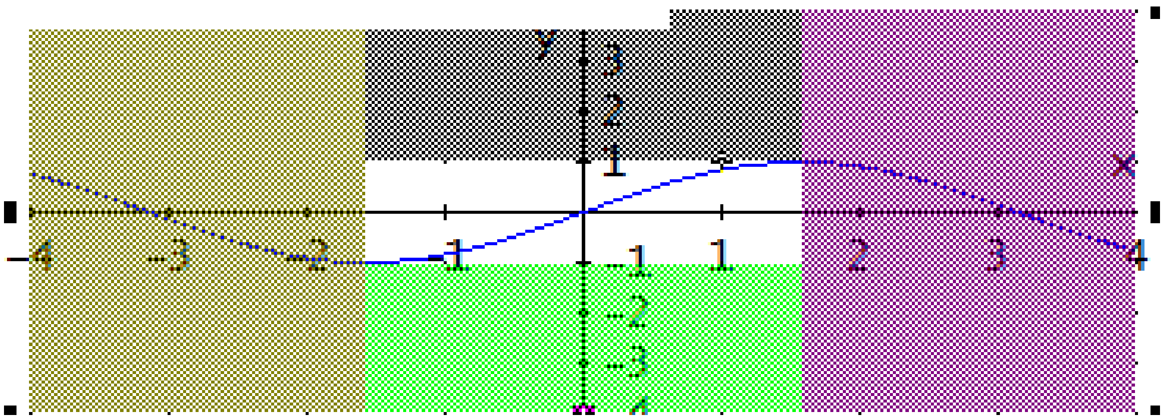


Funzione inversa

Sinusoide

$$f: [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$$

$$x \rightsquigarrow y = \sin x$$



Funzione inversa

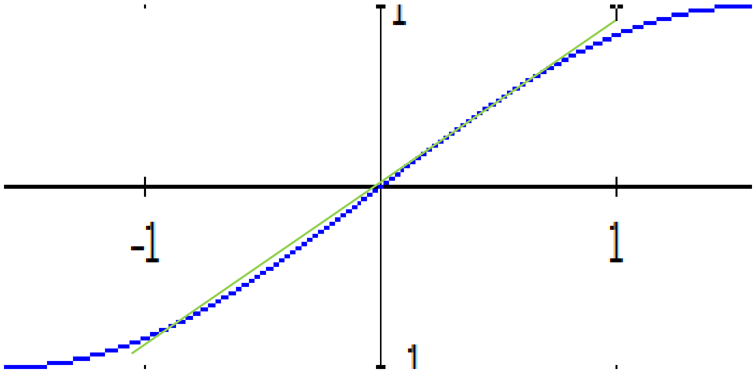
Sinusoide

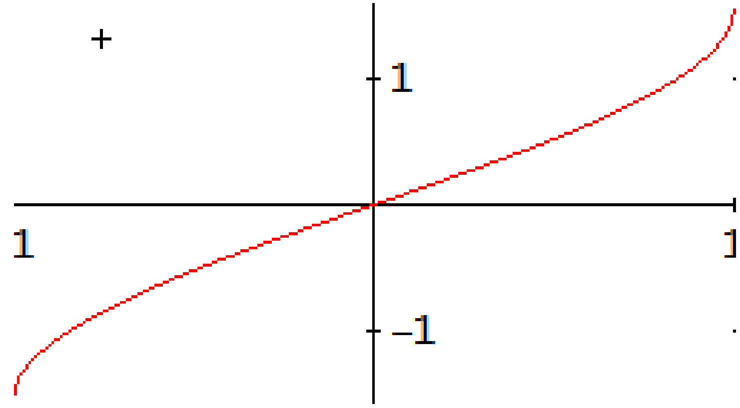
$f: [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$

$x \rightsquigarrow y = \sin x$

$f^{-1}: [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$

$y \rightsquigarrow x = \arcsin y$



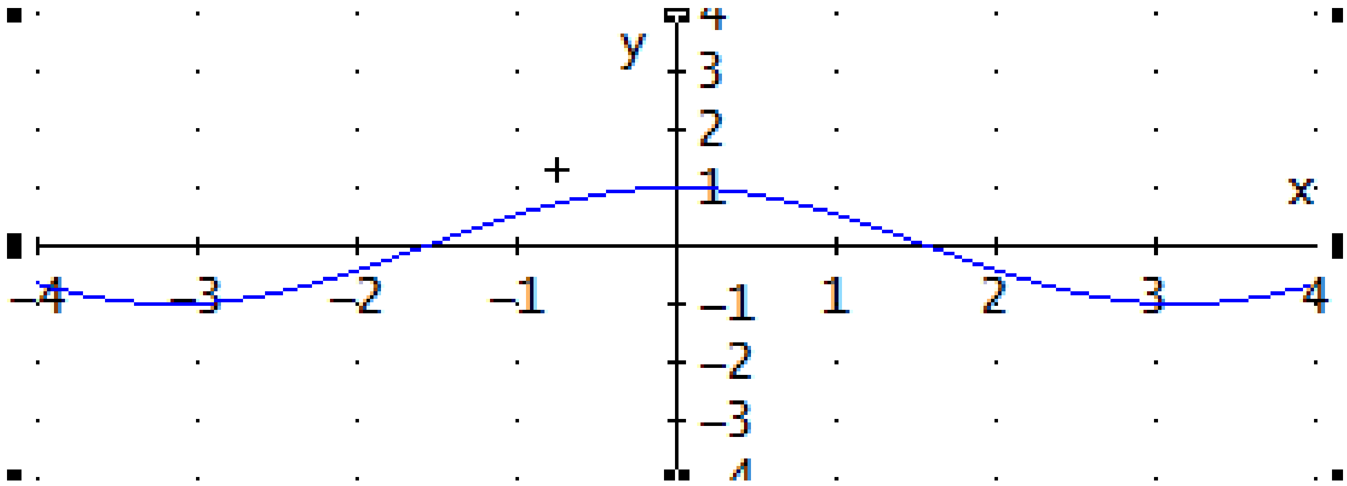


Funzione inversa

Cosinusoide

$f: R \to R$

$x \rightsquigarrow y = \cos x$



Funzione inversa

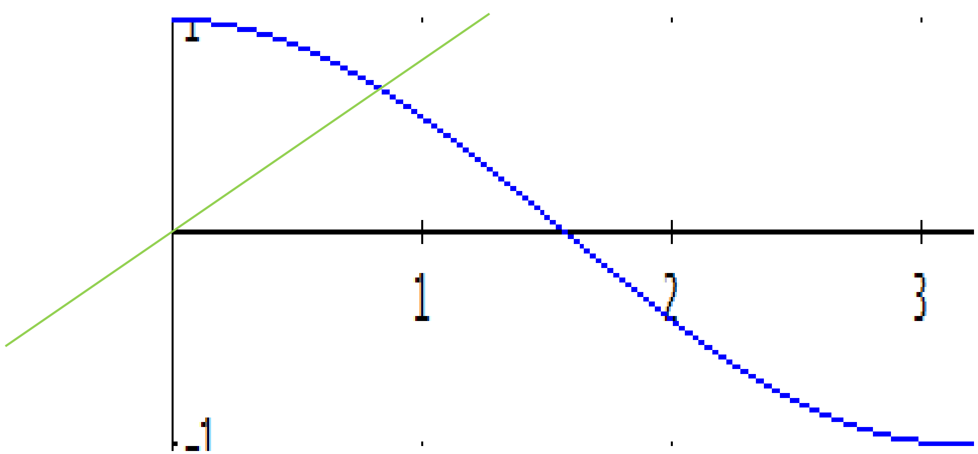
Cosinusoide

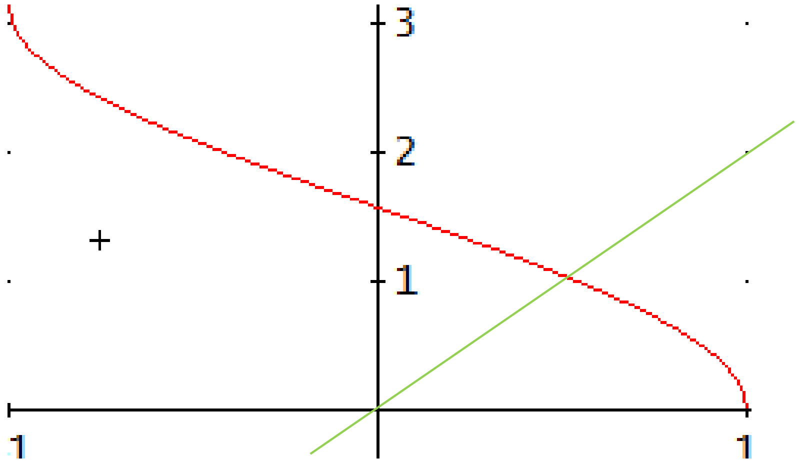
$f: [0, \pi] \rightarrow [-1,1]$

$x \rightsquigarrow y = \cos x$

$f^{-1}: [-1,1] \rightarrow [0, \pi]$

$y \rightsquigarrow x = \arccos y$



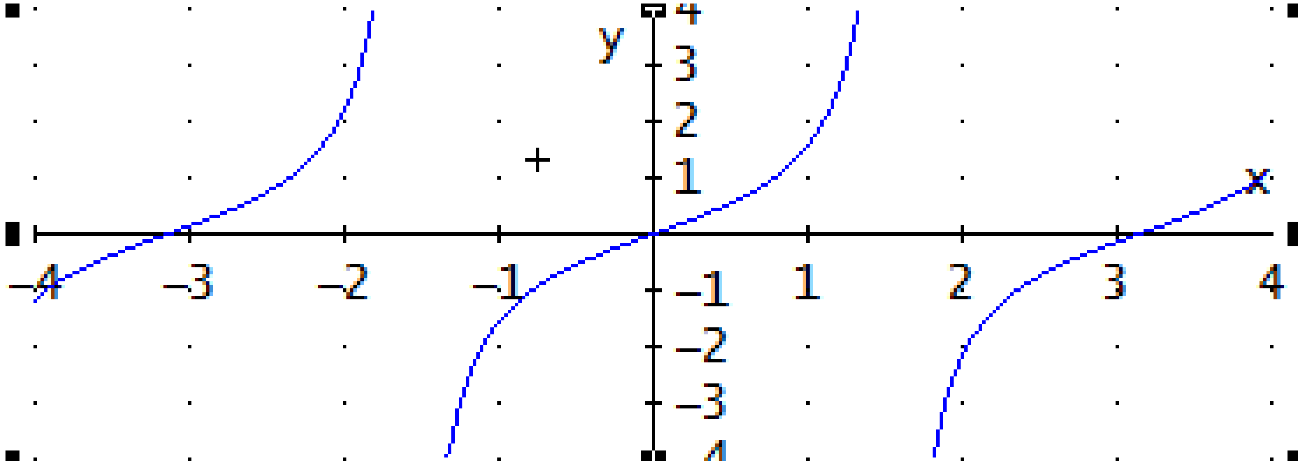


Funzione inversa

Tangentoide

f: R → R

x ⇝ y = tanx



Funzione inversa

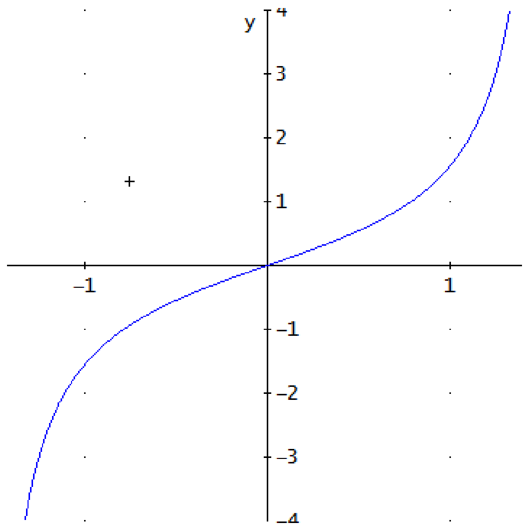
Tangentoide

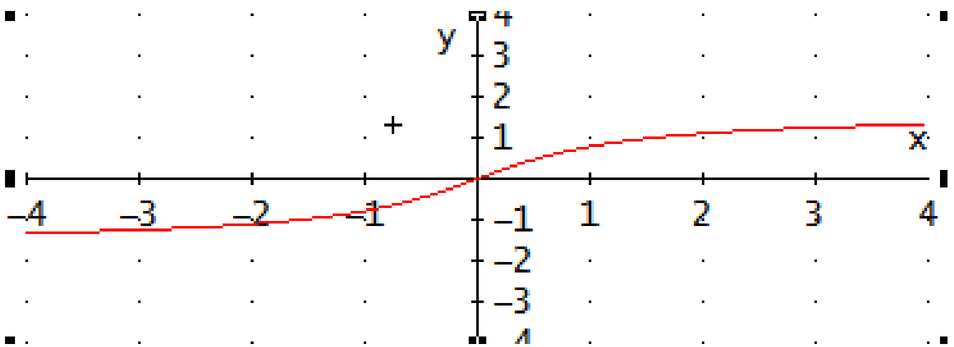
$f: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow R$

$x \rightsquigarrow y = \tan x$

$f^{-1}: R \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$

$y \rightsquigarrow x = \arctan y$





Intersezioni con gli assi

La ricerca dell'intersezione tra due curve del piano consiste nel determinare i punti del piano comuni alle due curve.

Intersezione con asse x

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

Intersezione con asse y

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

Studio del segno

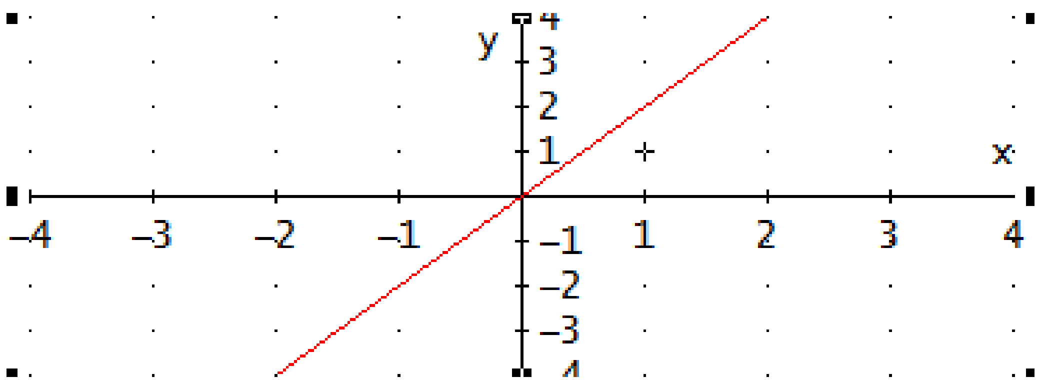
Lo studio del segno di una funzione consente di individuare in quali regioni del piano cartesiano il grafico della funzione sarà al di sopra dell'asse delle x.

Vogliamo individuare per quali valori della x la sua immagine $y > 0$.

Studio del segno

Razionali intere → polinomi

$f(x) > 0$ polinomio >0

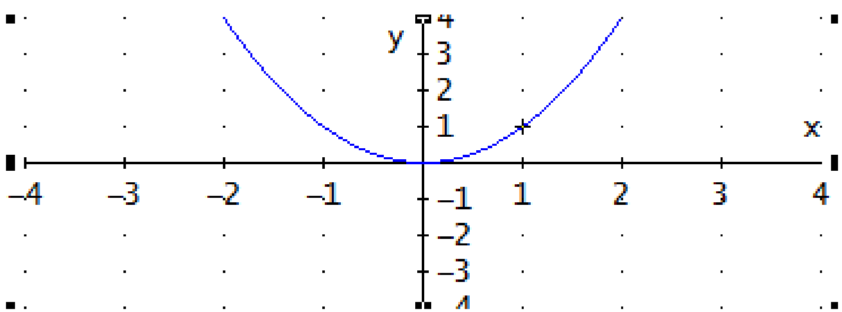


Studio del segno

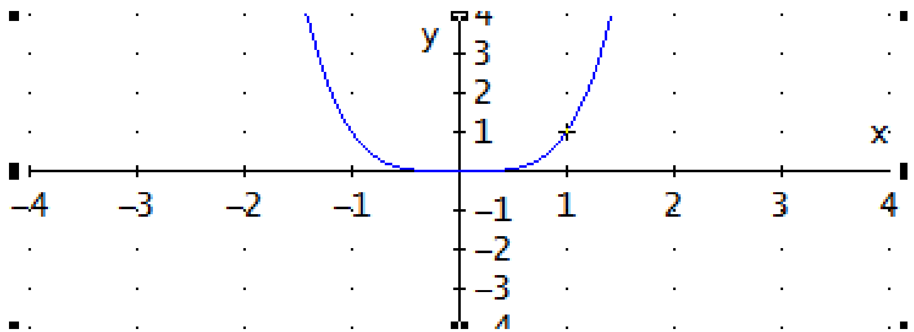
Razionali intere → polinomi

Se il polinomio è la somma di monomi di grado pari a coefficiente positivo, allora la funzione è sempre positiva.

$y = x^2$



$y = x^4$

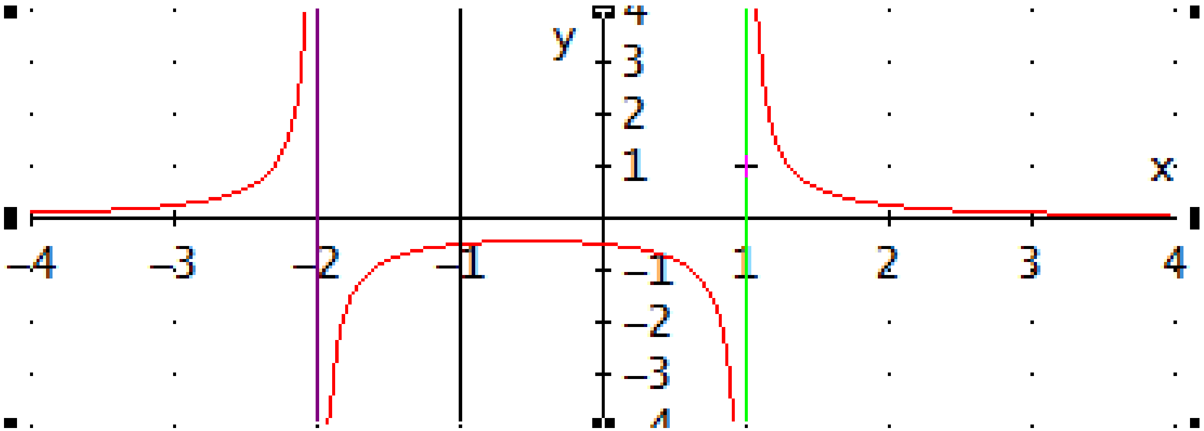


Studio del segno

Razionali fratte

Bisogna risolvere una disequazione fratta.

$$y = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$



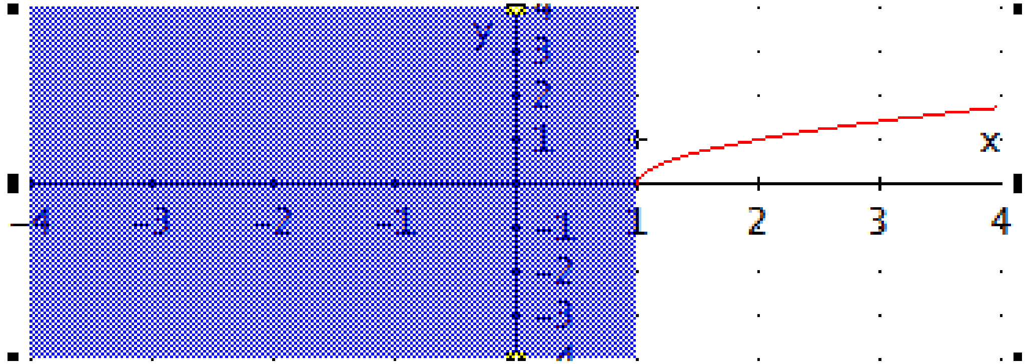
Studio del segno

Irrazionali → radici

Radici di indice pari

Sempre positiva.
Se la radice è preceduta dal segno - allora la funzione è sempre negativa.

$$y = \sqrt{x-1}$$



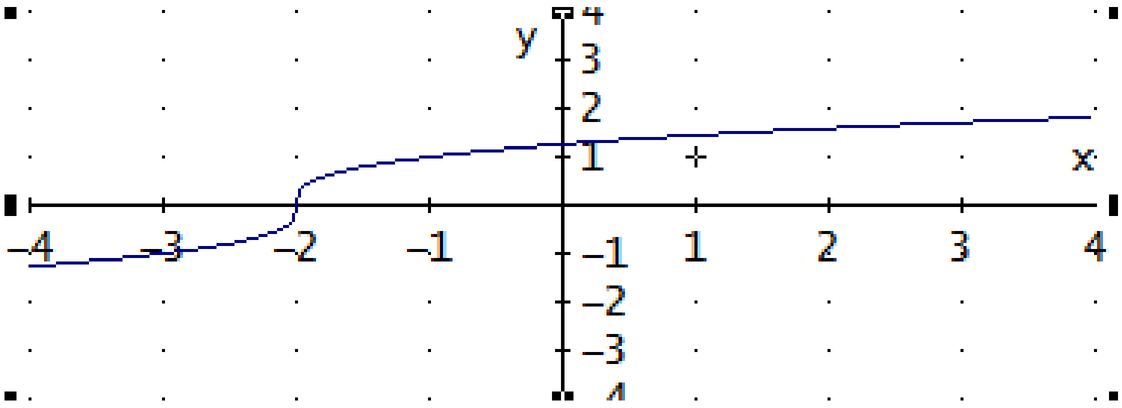
Studio del segno

Irrazionali → radici

Radici di indice dispari

Argomento della radice > 0

$$y = \sqrt[3]{x+2}$$

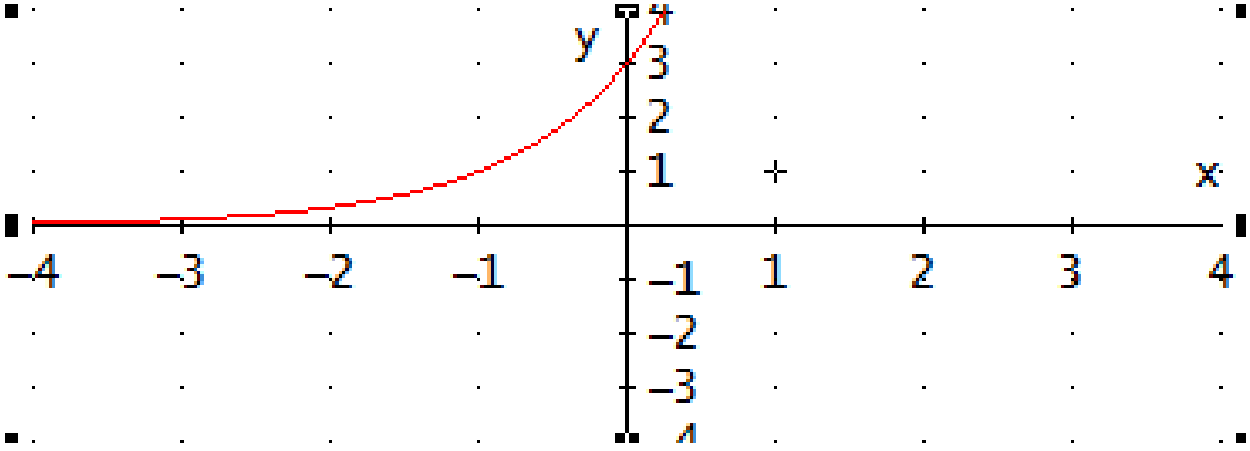


Studio del segno

Esponenziali

Sempre positiva

$$y = 3^{x+1}$$



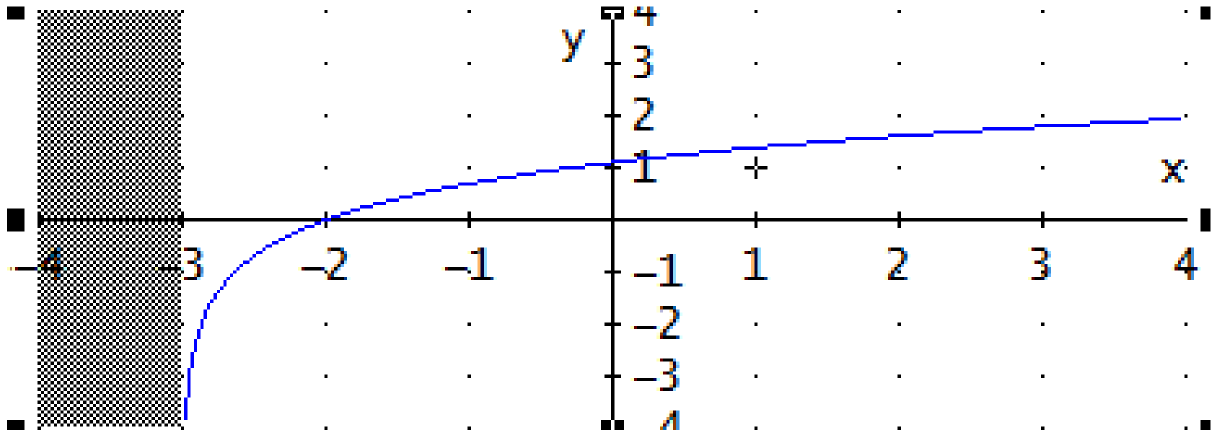
Studio del segno

Logaritmi

Base >1 → Argomento > 1

0<Base <1 → Argomento < 1

$$y = \ln(x+3)$$



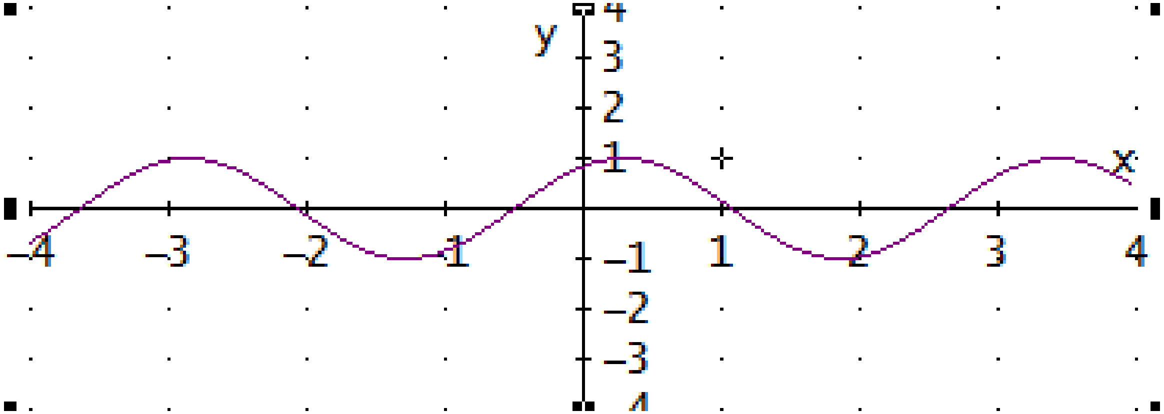
Studio del segno

Trigonometriche

Seno

Disequazione trigonometrica

$$y = \sin(2x+1)$$



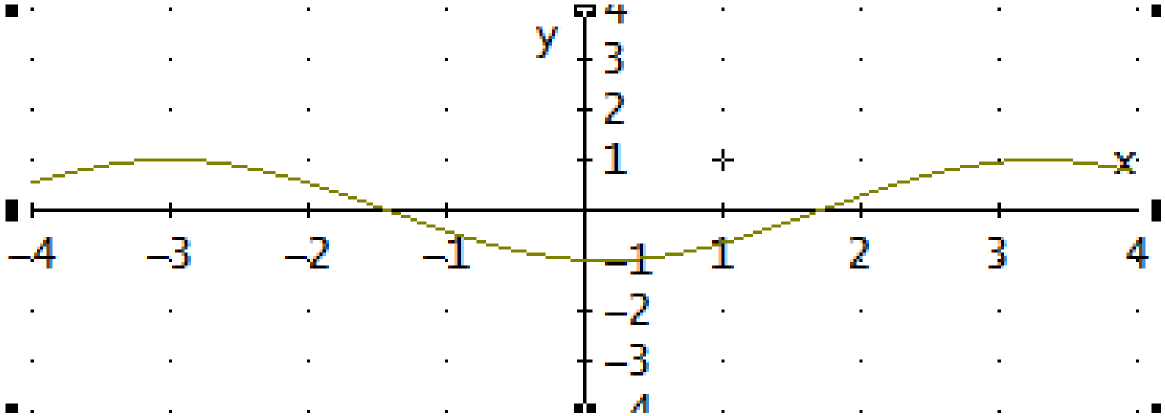
Studio del segno

Trigonometriche

Coseno

Disequazione trigonometrica

$$y = \cos(x+3)$$



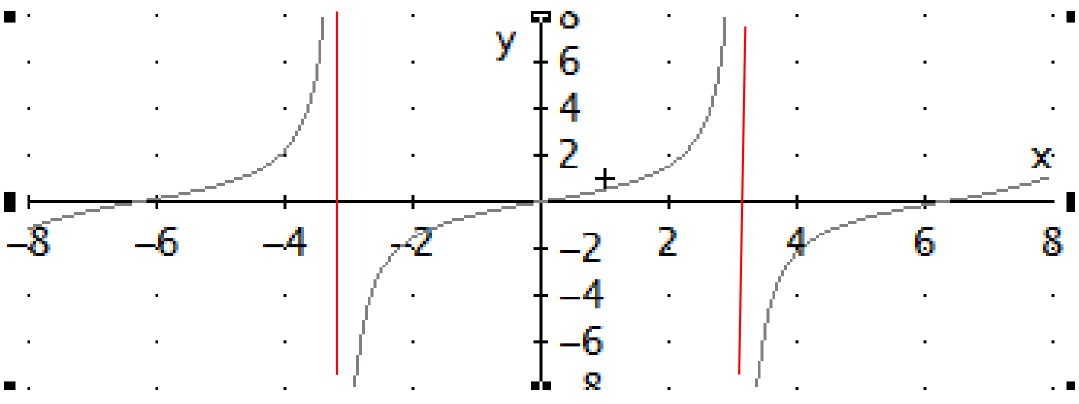
Studio del segno

Trigonometriche

Tangente

Disequazione trigonometrica

$$y = \tan\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$$



Studio del segno

Valore assoluto

$$y = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$

Sempre > 0