Calcolo infinitesimale

L'operazione di limite

Nelle applicazioni l'operazione di limite si usa per studiare cosa accade ad una certa grandezza dopo un grande periodo di tempo (comportamento asintotico o divergenza) o per valori particolari della variabile indipendente.

L'operazione di limite

L'operazione di limite ha lo scopo di descrivere il comportamento di una funzione nei pressi di un punto di accumulazione per il suo dominio.

Limite finito per $x \rightarrow x_0$

Sia $f: A \rightarrow R$ ed x_0 un punto di accumulazione per A. Sia $l \in R$.

Diremo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Se $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta_\varepsilon > 0 \mid |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Se $\forall\ I_\varepsilon(l)\ \exists\ I_\delta(x_0) \mid x \in I_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l)$

Limite finito per $x \to x_0$

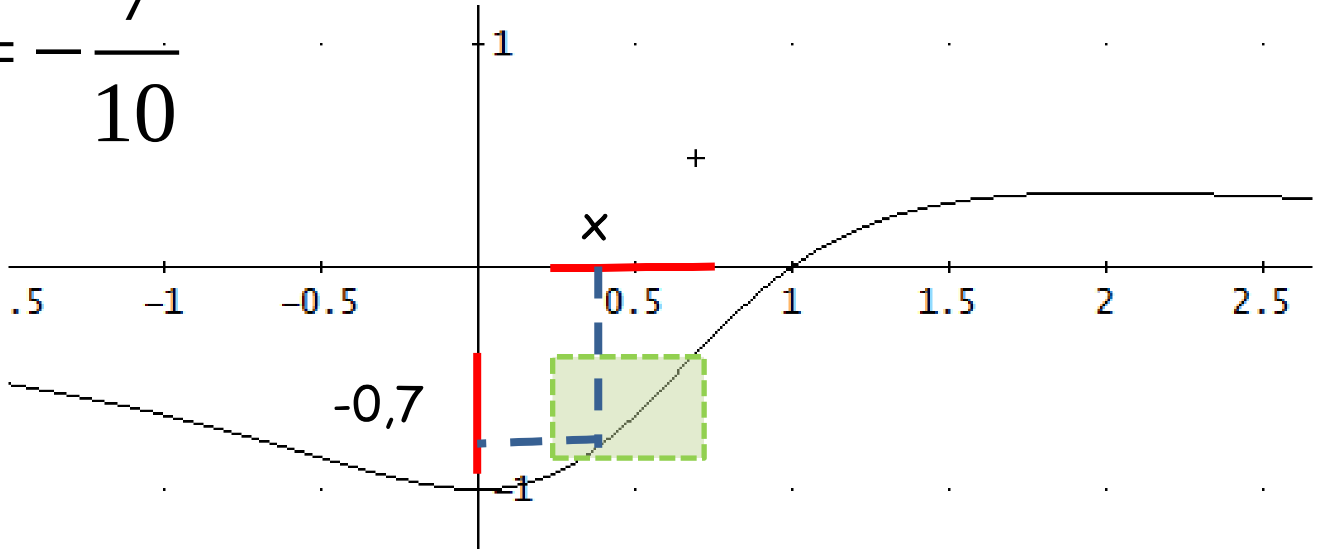
Attenzione!

Ricordiamo che il punto di accumulazione x_0 potrebbe non appartenere ad A e quindi $f(x_0)$ potrebbe non essere definita.

Pur esistendo, non è detto che $f(x_0) = l$.

Limite finito per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = -\frac{7}{10}$$



Se $\forall\ I(-0{,}7)\ \exists\ I_\varepsilon(0{,}5)\ |\ x \in I_\varepsilon(0{,}5) \Rightarrow f(x) \in I(-0{,}7)$

Verificare i seguenti limiti.

$$\lim_{x \to 3}(x+2) = 5$$

$$\lim_{x \to +1}(2x-6) = -4$$

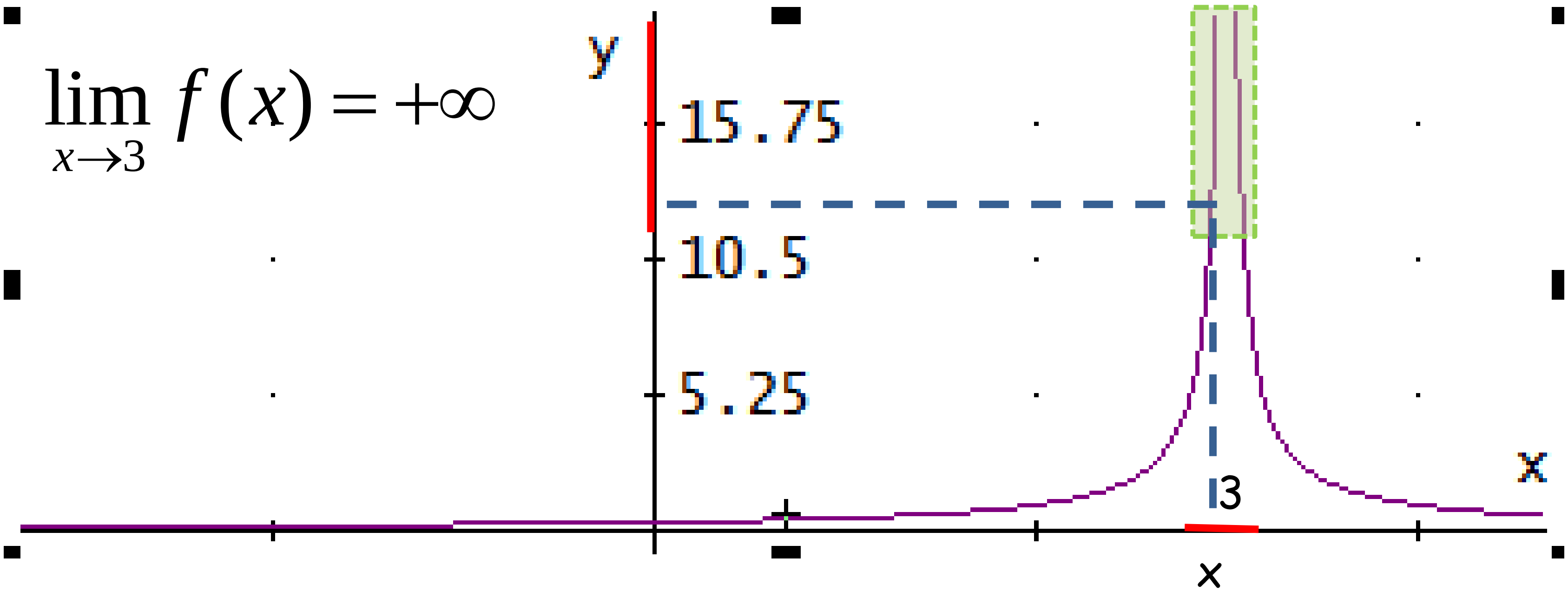
Limite infinito per $x \to x_0$

Sia $f: A \to R$ ed x_0 un punto di accumulazione per A.

Diremo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Se $\forall M>0, \exists\, \delta_M > 0 \mid |x - x_0| < \delta_M \Rightarrow |f(x)| > M$.

Limite infinito per $x \to x_0$



Se $\forall M>0, \exists\ \delta_M > 0 \mid |x-3| < \delta_M \Rightarrow |f(x)| > M$.

Verificare i seguenti limiti.

$$\lim_{x \to 2} \log|x-2| = -\infty$$

Asintoti

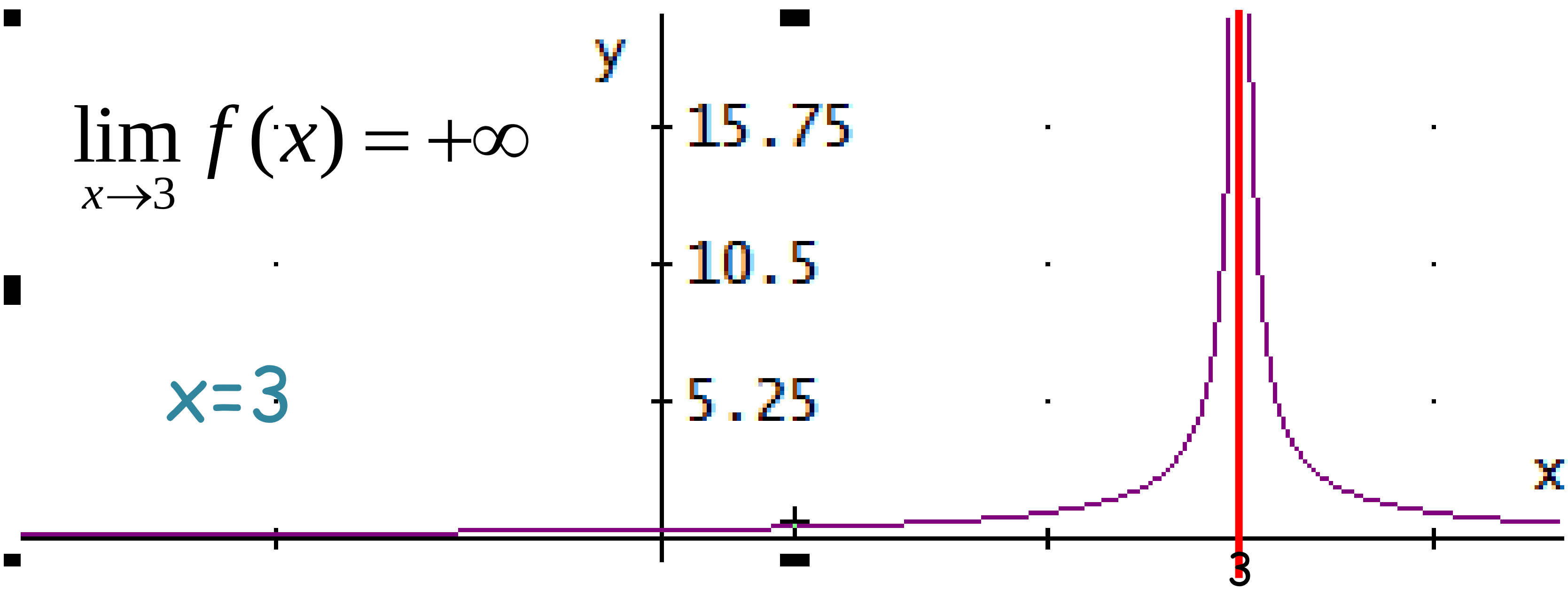
Un asintoto è una retta a cui il grafico della funzione tende.

Una retta y=mx+q è un asintoto per il grafico della funzione f:R→R se

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ oppure \\ x \to \infty}} \left[f(x) - (mx+q) \right] = 0$$

Asintoti

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ allora si è in presenza di un asintoto verticale di equazione $x=x_0$.



$$\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$$

$x=3$

Limite finito per $x \to \infty$

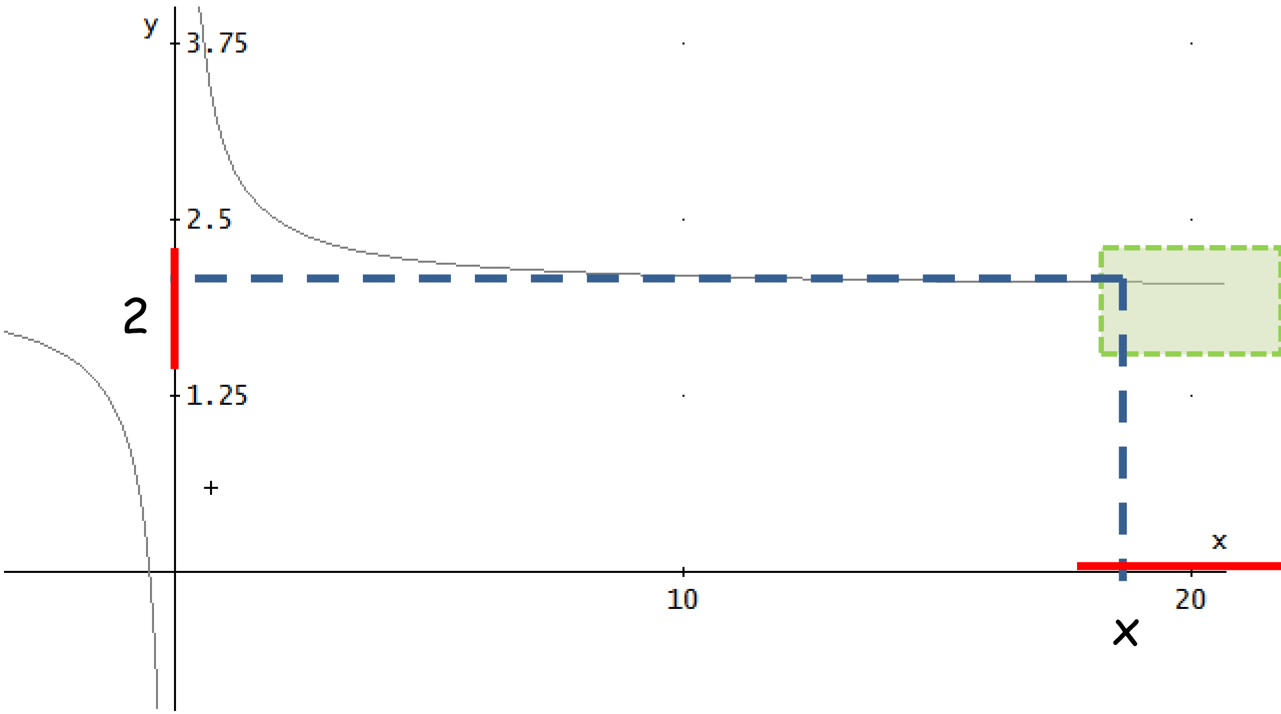
Sia $f: A \to R$, con A illimitato, e sia $l \in R$.

Diremo che $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$

Se $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ M>0 \mid |x|>M \Rightarrow |f(x)-l|< \varepsilon$.

Limite finito per x→∞

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$



Se $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ M>0 \mid |x|>M \Rightarrow |f(x)-2|< \varepsilon.$

Verificare i seguenti limiti.

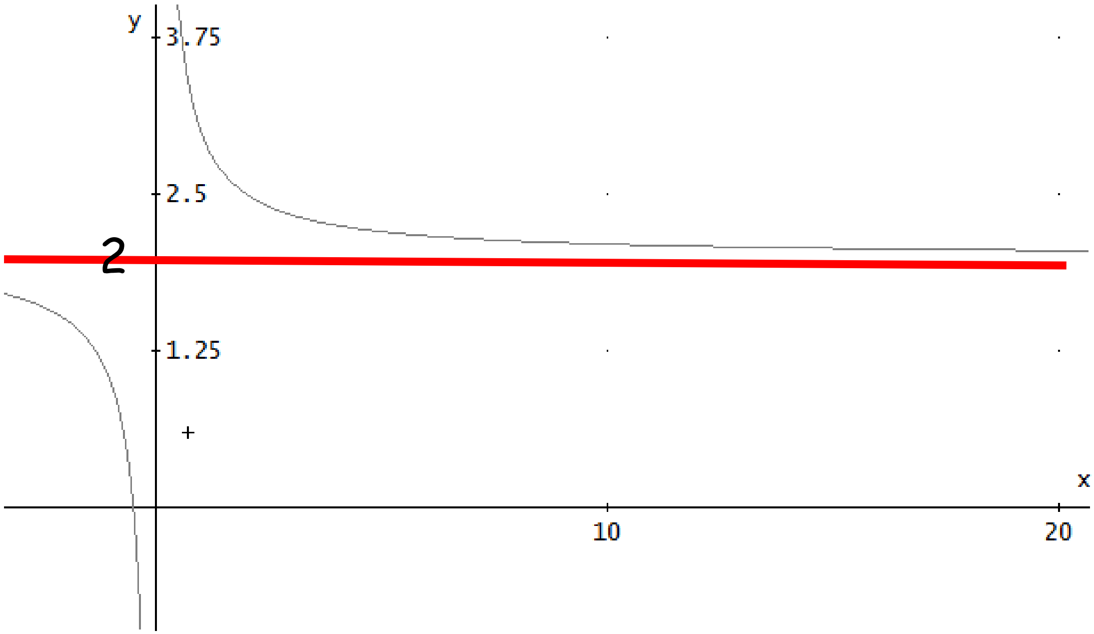
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Asintoti

Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ allora si è in presenza di un asintoto orizzontale di equazione y=l.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

y=2



Limite infinito per $x \to \infty$

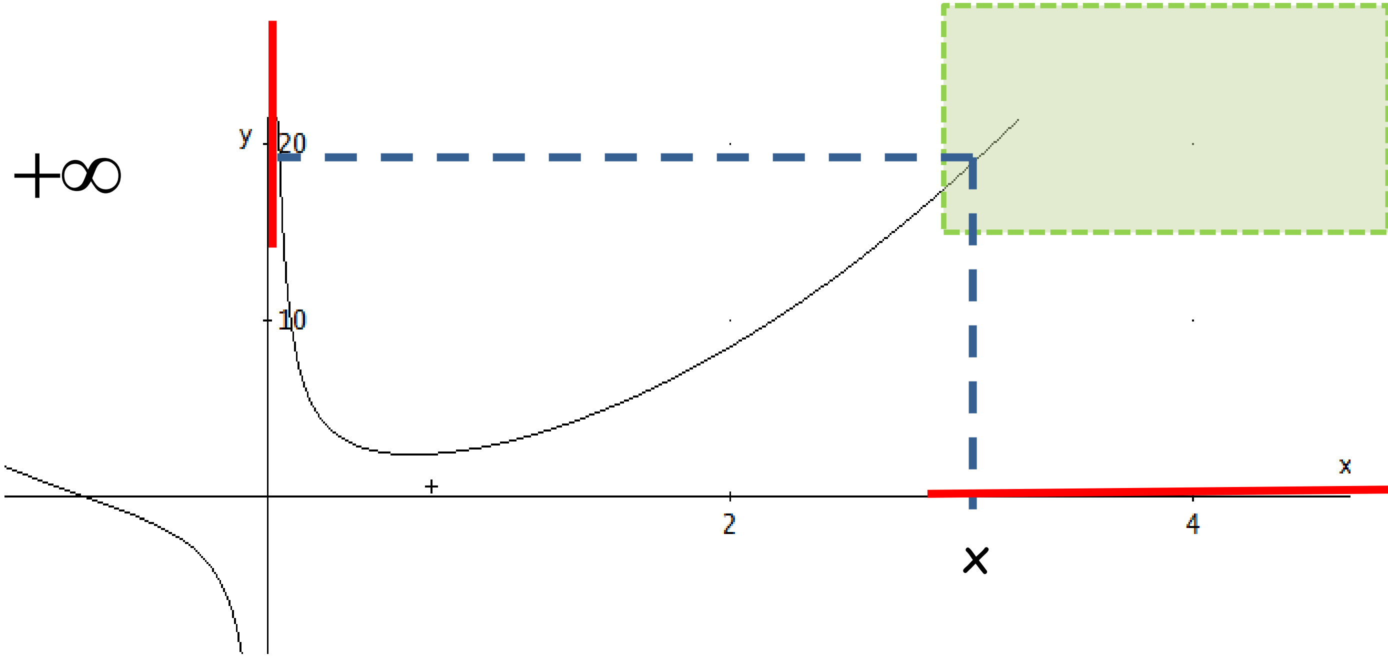
Sia f: A $\to$ R, con A illimitato.

Diremo che $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Se $\forall N>0, \exists M>0 \mid |x|>M \Rightarrow |f(x)|>N$.

Limite infinito per x→∞

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



Se $\forall N>0, \exists\ M>0 \mid |x|>M \Rightarrow |f(x)|>N$.

Verificare i seguenti limiti.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

Asintoti

Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ la funzione potrebbe avere

un asintoto obliquo, cioè una retta y=mx+q

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ oppure \\ x\to\infty}} \left[f(x) - (mx+q) \right] = 0$$

Limite destro per $x \to x_0$

Sia f: $A \to R$ ed x_0 un punto di accumulazione per A. Sia $l \in R$.

Diremo che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

se $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < (x - x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Limite sinistro per $x \to x_0$

Sia $f: A \to R$ ed x_0 un punto di accumulazione per A. Sia $l \in R$.

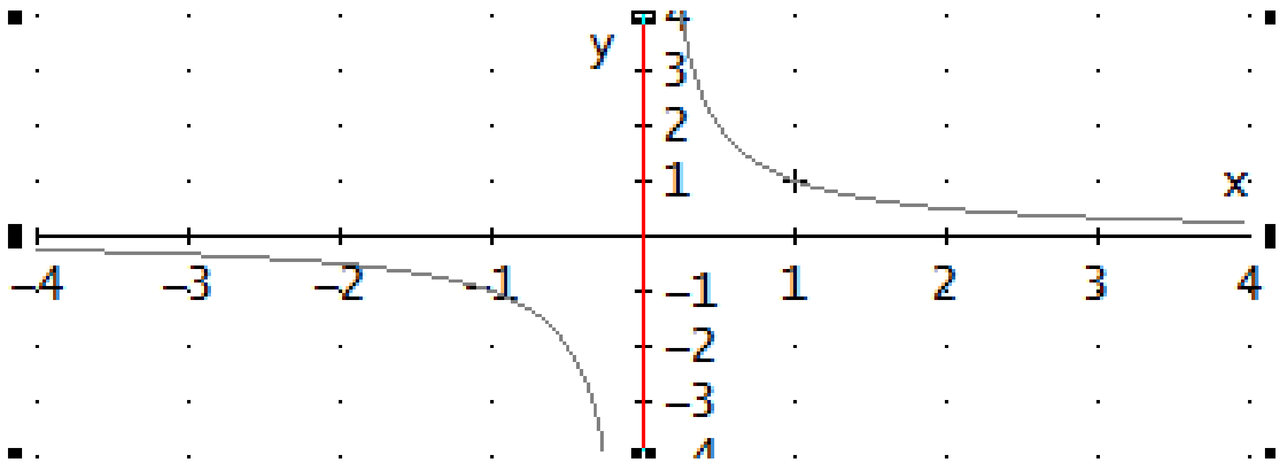
Diremo che $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

se $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \mid -\delta_\varepsilon < (x - x_0) < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Verificare i seguenti limiti.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



Limite finito per $x \to x_0$

Condizione necessaria e sufficiente perché

esista $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ é che esistano e siano

uguali $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

Esempi di non esistenza del limite

$$y = \begin{cases} 1 & se \quad x \geq 0 \\ -4 & se \quad x < 0 \end{cases}$$

$$y = \text{segno}(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ -1 & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Teorema di unicità del limite

Sia f: A → R ed x_0 un punto di accumulazione per A. Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ allora è unico.

Esempi di non esistenza del limite

$$\lim_{x \to +\infty} \cos x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sin x$$

Teorema della permanenza del segno

Sia $f: A \to R$ ed x_0 un punto di accumulazione per A. Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$ allora esiste

$I(x_0)$ in cui $f(x) > 0$, $\forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Corollario

Sia f: $A \rightarrow R$ ed x_0 un punto di accumulazione per A. Se esiste $I(x_0)$ in cui $f(x)>0$, $\forall\, x \in I(x_0)\setminus\{x_0\}$

ed esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, allora $l \geq 0$.

Operazioni con i limiti

Sia f: $A \rightarrow R$ | y=k ed x_0 un punto di accumulazione per A, allora $\lim_{x \to x_0} k = k$

Sia f: $A \rightarrow R$ | y=x ed x_0 un punto di accumulazione per A, allora $\lim_{x \to x_0} x = x_0$

Sia f: $A \rightarrow R$ ed x_0 un punto di accumulazione per A. Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ allora $\lim_{x \to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot l$

Operazioni con i limiti

Somma

Siano f e g: $A \rightarrow R$ ed x_0 un punto di accumulazione per A.

Siano $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$

allora $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = l + m$

Operazioni con i limiti

Somma

ATTENZIONE: $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l + m$

NON IMPLICA $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ E $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\sin^2 x + \cos^2 x\right] = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

Operazioni con i limiti

Differenza

Siano f e g: A → R ed x_0 un punto di accumulazione per A.

Siano $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$

allora $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - g(x) \right] = l - m$

Operazioni con i limiti

Prodotto

Siano f e g: $A \rightarrow R$ ed x_0 un punto di accumulazione per A.

Siano $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$

allora $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = l \cdot m$

Operazioni con i limiti

Potenza

Siano f: $A \rightarrow R$ ed x_0 un punto di accumulazione per A.

Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ allora $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = l^n$

Operazioni con i limiti

Divisione

Siano f e g: A → R ed x_0 un punto di accumulazione per A. Sia $g(x)\neq 0$ in $I(x_0)\setminus\{x_0\}$.

Siano $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \neq 0$

allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

Operazioni con i limiti

Inverso

Siano f : A → R ed x_0 un punto di accumulazione per A. Sia $f(x) \neq 0$ in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$.
Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0$,

allora $$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$$

Operazioni con i limiti

Inverso

Siano $f : A \to R$ ed x_0 un punto di accumulazione per A. Sia $f(x) \neq 0$ in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

Se $f(x) > 0$ in $I(x_0)$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Operazioni con i limiti

Inverso

Siano $f : A \rightarrow R$ ed x_0 un punto di accumulazione per A. Sia $f(x) \neq 0$ in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Asintoti obliqui

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(mx+q)\right]=0$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

Se q e m≠0 esistono e sono finiti allora posso dire che esiste l'asintoto obliquo di equazione y=mx+q.

Operazioni con i limiti

Le operazioni con i limiti possono essere eseguite anche quando $x \to \infty$.

Se $l=\infty$ posso operare come con i reali con le seguenti eccezioni:

$$\left.\begin{array}{l} +\infty - \infty \\ 0 \cdot \infty \\ \infty / \infty \\ 0/0 \\ 0^0 \end{array}\right\} \quad \text{FORME INDETERMINATE}$$

Esercizio

Studiare le seguenti funzioni:

$$y = \frac{2}{x} + 3$$

$$y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}$$

$$y = x^2 (x-5)^2$$

Funzioni continue

Siano f : A → R ed x_0 un punto di accumulazione per A. La funzione f si dice continua in $x_0 \in A$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Funzioni continue

Se $f : A \rightarrow R$ è continua per tutti i punti di un intervallo del dominio allora si dice che è continua in quell'intervallo.

Se $f : A \rightarrow R$ è continua per tutti i punti di A allora si dice che è continua nel dominio.

Funzioni discontinue

Se $f : A \rightarrow R$ non è continua in $x \in A$ allora si dice che la funzione è discontinua nel punto x.

Discontinuità di prima specie $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{per } x>0 \\ -3 & \text{per } x<0 \end{cases}$$

Funzioni discontinue

Se f : A → R non è continua in x∈A allora si dice che la funzione è discontinua nel punto x.

Discontinuità di seconda specie $\lim_{\substack{x \to x_0^- \\ oppure \\ x \to x_0^+}} f(x) = \infty$

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{per } x>0 \\ -3 & \text{per } x<0 \end{cases}$$

Funzioni discontinue

Se f : A → R non è continua in x∈A allora si dice che la funzione è discontinua nel punto x.

Discontinuità di terza specie

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ -3 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Teorema di Weierstrass

Sia $f: D=[a,b] \rightarrow R$, continua. Essa ammette massimo e minimo assoluto in D.

Corollario 1

Sia $f: D=[a,b] \rightarrow R$, continua. Essa assume tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.

Corollario 2

Sia $f: D=[a,b] \rightarrow R$, continua.
Se $f(a)>0 \wedge f(b)<0 \Rightarrow \exists\, c \in D \mid f(c)=0$.

Funzioni continue in R

Sia $f: R \to R,$

$x \qquad y=k$

Sia $f: R \to R$

$x \qquad y=x$

Funzioni continue in R

Sia $f: R \to R$

$x \qquad y=mx$

Sia $f: R \to R$

$x \qquad y=x^n$

Operazioni tra funzioni continue

Somma

Siano f e g: $A \to R$ continue in A, allora anche $f+g$ è continua.

Differenza

Siano f e g: $A \to R$ continue in A, allora anche $f-g$ è continua.

Operazioni tra funzioni continue

Prodotto

Siano f e g: $A \rightarrow R$ continue in A, allora anche $f \cdot g$ è continua.

Potenza

Sia f: $A \rightarrow R$ continua in A, allora anche $[f(x)]^n$ è continua.

Operazioni tra funzioni continue

Divisione

Siano f e g: $A \to R$ continue in A.
Sia $B=\{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$. Allora $\frac{f}{g}$ è continua in B.

Sia f: $A \to R$ continua in A. Sia $B=\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$.
Allora $\frac{1}{f}$ è continua in B.

Funzioni continue

Su tutto R.

La funzione identità

I polinomi

Le funzioni sinx e cosx

La funzione esponenziale

Continuità della funzione inversa

Sia $f: A \to B$ continua in $x_0 \in A$ ed invertibile.
Allora $f^{-1}: B \to A$ è continua in $y_0 = f(x_0)$.

Funzioni continue

Nel loro dominio

Le funzioni razionali fratte

Le funzioni irrazionali

La funzione tanx

La funzione logaritmo

Le inverse delle funzioni goniometriche

Limite di funzione composta

Siano f: A → B e g: B → C. Sia x_0 punto di accumulazione per A e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Sia l punto di accumulazione per B e $\lim_{y \to l} g(y) = L$.

Allora esiste $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L$.

Continuità di funzione composta

Siano f: A → B e g: B → C, continue. Allora anche la funzione $g \circ f$ è continua.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} y = y_0$$

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) = g(f(x_0))$$

Risoluzione di forme indeterminate

$\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

Mettere in evidenza il termine di grado maggiore

$$\lim_{x\to\infty}\left[-3x^2+2x\right] \qquad \lim_{x\to\infty}\left[x-4x^3+2\right]$$

Risoluzione di forme indeterminate

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$$

Mettere in evidenza il termine di grado maggiore sia al numeratore che al denominatore.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{3x^2-1} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{-9x^2-3} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{-x^2+1}$$

Risoluzione di forme indeterminate

$$\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\cancel{(x-x_0)}P^{n-1}(x)}{\cancel{(x-x_0)}Q^{m-1}(x)}$$

Scomporre numeratore e denominatore e poi semplificare.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+4x^2+x-6}$$

Infiniti e infinitesimi

Sia $f: A \to B$ e sia x_0 punto di accumulazione per A.

La funzione si dice infinitesima in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

La funzione si dice infinita in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Confronto tra infinitesimi

Siano f e g: A → R e sia x_0 punto di accumulazione per A. Siano f e g infinitesime in x_0.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a \in R, a \neq 0$$

f e g sono infinitesimi dello stesso ordine

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

f è infinitesimo di ordine superiore

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

g è infinitesimo di ordine superiore

$$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

infinitesimi non confrontabili

Confronto tra infinitesimi

Siano f e g: $A \to R$ e sia x_0 punto di accumulazione per A. Siano f e g infinitesime in x_0.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

f è infinitesimo di ordine superiore rispetto a g.

$f=o(g)$

Ordine di un infinitesimo

Siano f e g: A → R e sia x_0 punto di accumulazione per A. Siano f e g infinitesime in x_0. Diciamo che f è un infinitesimo di ordine α rispetto a g se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|^{\alpha}} = l > 0$$

g è detto infinitesimo campione.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^{\alpha}} = l \qquad\qquad \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{(x-b)^{\alpha}} = l$$

Confronto tra infinitesimi

Siano $f : R \to R$ e $g : R \to R$

$x \quad y=x \qquad x \quad y=\sin x$

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

f e g sono infinitesime in x=0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

f e g sono infinitesimi dello stesso ordine.

Confronto tra infinitesimi

Siano $f : R \to R$ e $g : R \to R$

$x \quad y=x$ $\qquad$ $x \quad y=x^2$

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

f e g sono infinitesime in 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

g è infinitesimo di ordine superiore.

Confronto tra infiniti

Siano f e g: A → R e sia x_0 punto di accumulazione per A. Siano f e g infinite in x_0.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a \in R, a \neq 0$$

f e g sono infiniti dello stesso ordine

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

g è infinito di ordine superiore

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

f è infinito di ordine superiore

$$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

infiniti non confrontabili

Confronto tra infiniti

Siano f e g: A → R e sia x_0 punto di accumulazione per A. Siano f e g infinite in x_0.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

f è infinito di ordine superiore rispetto a g.

f=O(g)

Ordine di un infinito

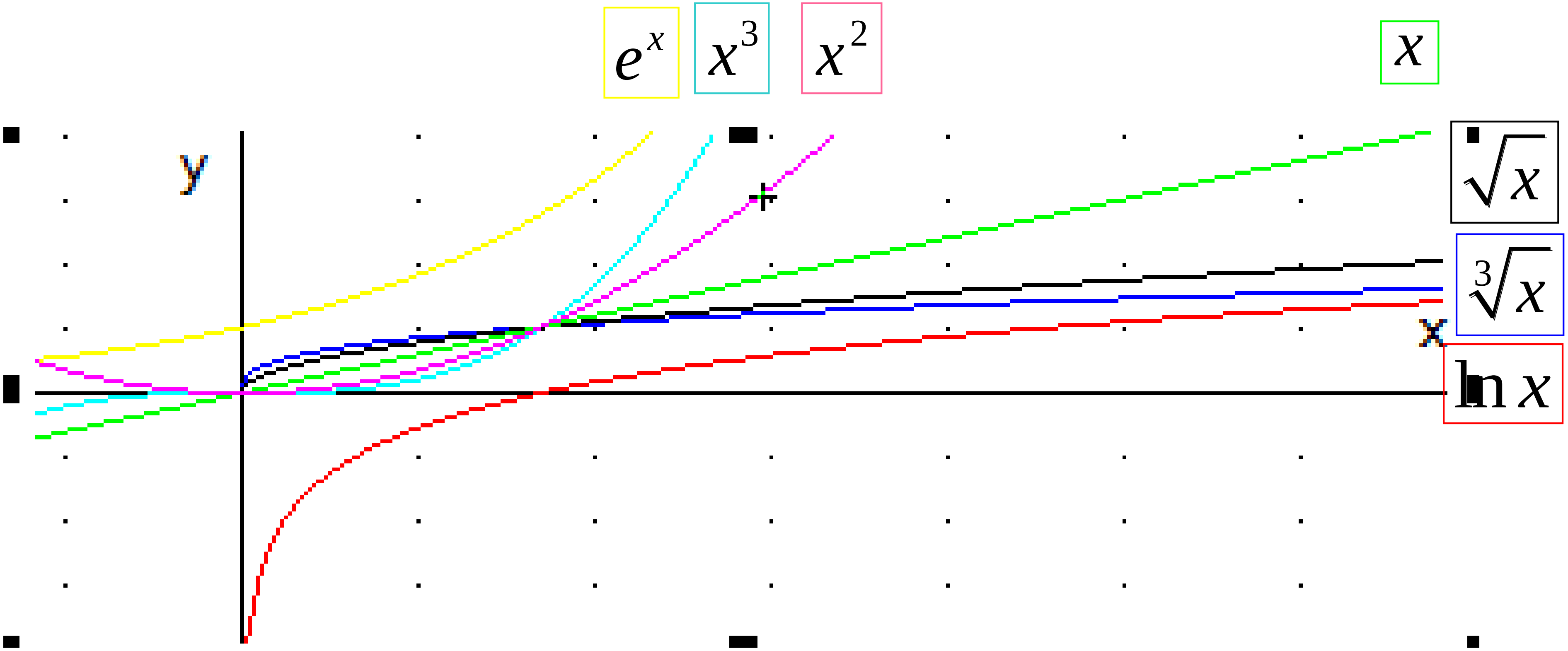
Siano f e g: A → R e sia x_0 punto di accumulazione per A. Siano f e g infinite in x_0. Diciamo che f è un infinito di ordine α rispetto a g se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|^{\alpha}} = l > 0$$

g è detto infinito campione.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}} = l$$

Confronto tra infiniti



Esercizio

Studiare le seguenti funzioni:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$y = \frac{e^x}{x}$$