SI CONSIDERI IL SISTEMA

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = k+3 \\ -2x + 6y + (k+7)z = 2k+9 \\ x - 4y - 2z = k-2 \\ 3x - 6y + (k-7)z = k^2 - k - 9 \end{cases}$$

LA CUI MATRICE DEI COEFFICIENTI È

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & k+7 \\ 1 & -4 & -2 \\ 3 & -6 & k-7 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} k+3 \\ 2k+9 \\ k-2 \\ k^2-k-9 \end{matrix}\right.\right) = A|b$$

TRASFORMIAMO LA MATRICE IN UNA EQUIVALENTE, DELLA QUALE SIA PIÙ SEMPLICE CALCOLARE IL DETERMINANTE.

USANDO IL METODO DI GAUSS-JORDAN, ED ESEGUENDO LE SEGUENTI TRASFORMAZIONI

1	2	3
$R_2 \to R_2 - 2R_1$	$R_3 \to R_3 + R_2$	$R_4 \to R_4 - R_3$
$R_3 \to R_3 + R_1$		
$R_4 \to R_4 + 3R_1$		

LA MATRICE DIVENTA

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & k+1 \\ 0 & 0 & k+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} k+3 \\ 3 \\ 2k+4 \\ k^2-4 \end{matrix}\right.\right) = A|b$$

- È EVIDENTE CHE SE $k^2 - 4 \neq 0$

$\det(A|b) \neq 0$ e $r(A|b) = 4$

$r(A) \leq 3 \neq 4$ } SISTEMA INCOMPATIBILE

SE $k^2 - 4 = 0 \Rightarrow k = 2 \wedge k = -2$

$\det(A|b) = 0$ e $r(A|b) \leq 3$

ESAMINIAMO I DUE CASI

- $k = 2$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

CONSIDERANDO IL MINORE NEL RIQUADRO SI VEDE CHE $r(A) = r(A|b) = 3$

IL SISTEMA HA $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1$ SOLUZIONE

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 \\ 2y + 3z = 3 \\ 4z = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 \\ 2y + 6 = 3 \\ z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - 3 + 6 = 5 \\ y = -3/2 \\ z = 2 \end{cases}$$

LA SOLUZIONE È $\left(-2, -\frac{3}{2}, 2\right)$

• $K = -2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

È EVIDENTE CHE IL $r(A)$ e $r(A|b) \leq 2$

CONSIDERANDO IL MINORE NEL RIQUADRO SI VEDE CHE $r(A) = r(A|b) = 2$

IL SISTEMA HA $\infty^{3-2} = \infty^1$ SOLUZIONI

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$$

PONGO $z = t$

$$\begin{cases} -x + (3+t) + 3t = 1 \\ y = \dfrac{3+t}{2} \end{cases}$$

LA SOLUZIONE È $\left(4t+2 ,\ \dfrac{3+t}{2} ,\ t \right)$