① $y = \dfrac{\ln x}{x - 3}$

Ⓐ $x > 0 \quad \wedge \quad x - 3 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 3$ $\qquad D: (0, 3) \cup (3, +\infty)$

Ⓑ NESSUNA INTERSEZIONE CON ASSE y $(x = 0) \to \notin D$

ASSE X

$$\begin{cases} y = \dfrac{\ln x}{x-3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-3} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

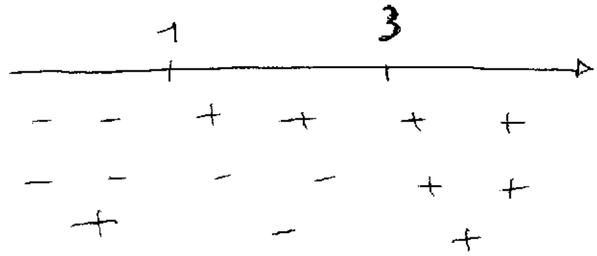
STUDIO DEL SEGNO DELLA FUNZIONE

$$y = \frac{\ln x}{x-3} > 0$$

$\ln x > 0 \;\rightarrow\; x > 1$

$x - 3 > 0 \;\rightarrow\; x > 3$

La funzione è positiva nell'intervallo $(0, 1)$ e in $(3, +\infty)$, negativa in $(1, 3)$



Ⓒ $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\overset{\nearrow -\infty}{\ln x}}{\underset{\searrow -3}{x - 3}} = +\infty$$

La retta $x = 0$ è un asintoto verticale.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{\overset{\nearrow \ln 3}{\ln x}}{\underset{\searrow 0^-}{x-3}} = -\infty$$

La retta $x = 3$ è un asintoto verticale

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{\overset{\nearrow \ln 3}{\ln x}}{\underset{\searrow 0^+}{x-3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x-3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Sfruttando il metodo del confronto tra infiniti e sapendo che i polinomi sono infiniti di ordine superiore rispetto alla funzione logaritmo, possiamo risolvere la forma indeterminata e concludere che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x-3} = 0^+$$

La retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

D $$y' = \frac{\frac{1}{x}(x-3) - \ln x}{(x-3)^2} = \frac{x - 3 - x\ln x}{x(x-3)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{x-3-x\ln x}{x(x-3)^2} = 0 \Rightarrow x - 3 - x\ln x = 0$$

mai, poiché $x - 3 - x\ln x \leq -2$ in tutto il dominio

Non ci sono punti stazionari

$y' > 0$

$x - 3 - x\ln x > 0$ mai in D

$x > 0 \quad \forall x \in D$

$(x-3)^2 > 0 \quad \forall x \in D$

La funzione è decrescente in tutto il dominio

(E) $$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y_0 \to f(e) = \frac{\ln e}{e-3} = \frac{1}{e-3} \qquad x_0 \to e$$

$$f'(x_0) \to f'(e) = \frac{\cancel{e} - 3 - \cancel{e \ln e}}{e(e-3)^2} = -\frac{3}{e(e-3)^2}$$

$$y = \underbrace{-\frac{3}{e(e-3)^2}}_{\text{coefficiente angolare}} x + \underbrace{\frac{3}{(e-3)^2} + \frac{1}{e-3}}_{\text{termine noto}}$$

(F) Per lo studio della concavità della funzione sfrutto la derivata seconda.

$$y'' = \frac{(\cancel{1} - 0 - \ln x - \cancel{x \cdot \tfrac{1}{x}})\, x (x-3)^2 - (x - 3 - x\ln x)\left[(x-3)^2 + x \cdot 2(x-3)\right]}{x^2 (x-3)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x-3)}\left[-x(x-3)\ln x - (x-3-x\ln x)\overbrace{(x-3+2x)}^{3x-3}\right]}{x^2 (x-3)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{-x^2 \ln x + \cancel{3x \ln x} + 3x^2 \ln x - \cancel{3x \ln x} - (x-3)\,3(x-1)}{x^2 (x-3)^3}$$

$$= \frac{2x^2 \ln x - 3(x-3)(x-1)}{x^2 (x-3)^3}$$

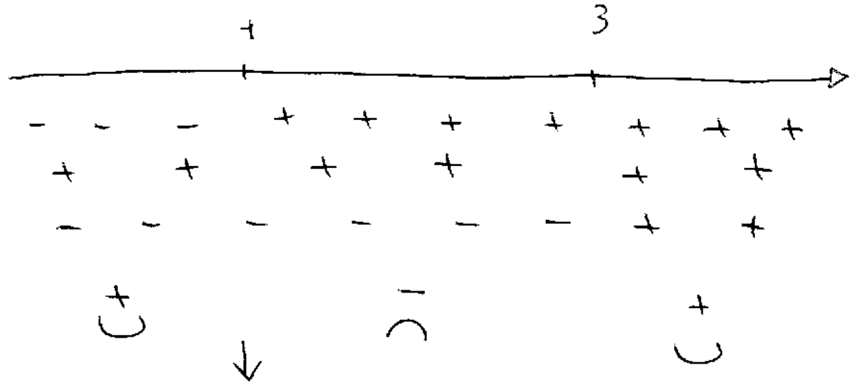
$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 \ln x - 3(x-1)(x-3) = 0$

l'eq. è soddisfatta per $x = 1$

$y'' > 0 \qquad 2x^2 \ln x - 3(x-1)(x-3) > 0 \qquad$ per $x > 1$

$x^2 > 0 \qquad \forall x \in D$

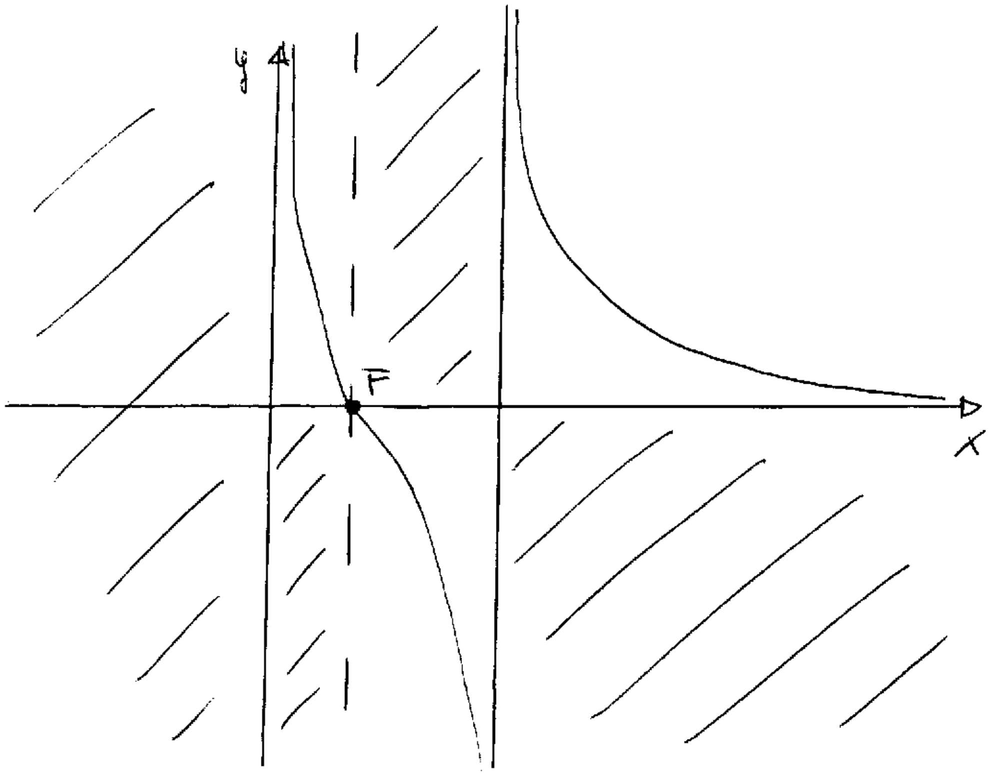
$(x-3)^3 > 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3) > 0 \qquad$ per $x > 3$



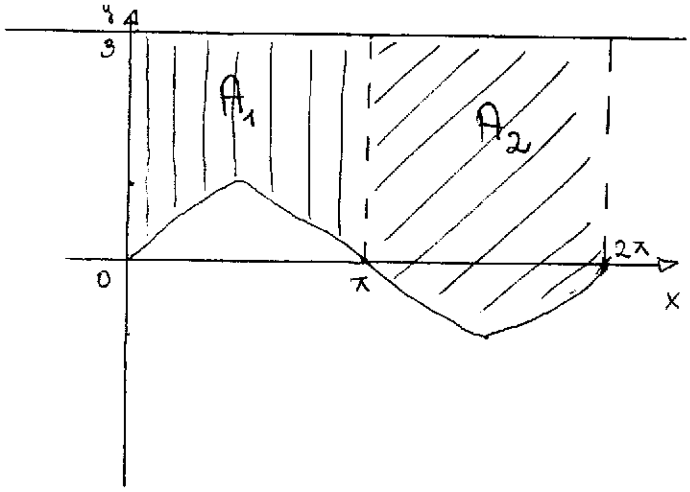
$F(1, 0)$

FLESSO A TANGENTE OBLIQUA

6



(2) Al fine di calcolare l'area richiesta rappresento graficamente la situazione descritta nel testo del problema.



La retta $y = 3$ è sempre sopra il grafico della sinusoide, limitato all'intervallo $[-1, 1]$.

Il grafico della sinusoide si trova sopra l'asse x per $x \in [0, \pi]$ e sotto l'asse x per $x \in [\pi, 2\pi]$.

È quindi necessario scomporre il problema nel calcolo di due aree.

$$A = A_1 + A_2 = 3\pi - 2 + 3\pi + 2 = 6\pi$$

$$A_2: \int_\pi^{2\pi} 3\,dx + \int_\pi^{2\pi} -\sin x\,dx = \Big[3x + \cos x\Big]_\pi^{2\pi} = 6\pi + 1 - 3\pi + 1$$

$$A_1: \int_0^\pi (3 - \sin x)\,dx = \Big[3x + \cos x\Big]_0^\pi = 3\pi - 1 - 0 - 1$$

Si può osservare che l'area descritta dalla sinusoide per $x \in [\pi, 2\pi]$ e dall'asse x è equivalente a quella descritta dalla stessa curva e dall'asse x per $x \in [0, \pi]$. Le due aree vanno quindi a compensarsi, riducendo il problema al calcolo dell'area di un rettangolo di base 2π e altezza 3, che vale appunto 6π.