

Corso di Laurea in Scienze Ambientali e Naturali

Matematica

Programma svolto nell'AA 2019-2020

Logica matematica

Proposizioni, connettivi e quantificatori. Uso dei simboli della logica nel linguaggio matematico. Metodi deduttivi (modus ponens, reductio ad absurdum, induzione matematica).

Analisi matematica

Insiemi e loro rappresentazione. Uguaglianza e sottoinsiemi. Insieme vuoto. L'insieme delle parti. Cardinalità di un insieme. Operazioni tra insiemi: unione, intersezione, e loro proprietà (cd), differenza insiemistica e complementazione. Prodotto cartesiano, sue proprietà e rappresentazione.

Insiemi numerici (N, Z, Q), operazioni e loro proprietà. Assiomi dei numeri reali. Proprietà degli insiemi di numeri reali: maggiorante, minorante, estremo inferiore e superiore, massimo, minimo. Intervalli della retta reale, aperti, chiusi, limitati e illimitati. Operazioni tra intervalli. Punti interni, esterni, di frontiera e di accumulazione. Teorema di Bolzano Weierstrass (sd). Numeri immaginari e complessi, loro rappresentazione, operazioni e loro proprietà (cd).

Relazioni, funzioni e loro rappresentazione, grafico di funzione, dominio, codominio e immagine del dominio. Proprietà delle relazioni su un insieme ed esempi (relazioni d'ordine e di equivalenza). Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche, funzione identità, funzioni composte e funzione inversa. Funzioni di variabile reale (polinomi, razionali fratte, irrazionali, logaritmo, esponenziale, funzioni trigonometriche, valore assoluto, funzioni a gradini). Funzioni elementari e composte, somma, sottrazione, prodotto e rapporto di funzioni. Funzioni pari, dispari, periodiche, limitate, monotone. Massimi e minimi locali e globali. Determinazione del dominio di una funzione e studio del segno.

Limiti per funzioni da R in R . Definizione di limite, limite destro e sinistro, per eccesso e per difetto. Definizioni di limite finito e infinito per x che tende ad un valore finito e all'infinito. Asintoti orizzontale, verticale e obliquo (cd). Casi di non esistenza del limite. Teorema di unicità del limite (sd) e della permanenza del segno (sd). Operazioni con limiti (somma con dimostrazione). Forme indeterminate. Limite di funzione composta (sd). Funzioni continue, continuità da destra e da sinistra. Continuità della funzione composta (sd). Discontinuità di I, II e III specie. Teorema degli zeri, dei valori intermedi, di Weierstrass (tutti sd). Risoluzione di forme indeterminate, infiniti, infinitesimi e loro confronto, simboli di Landau.

Derivata di una funzione in un punto e suo significato geometrico. Retta tangente ad una curva in un punto. Continuità delle funzioni derivabili (cd). Punti di non derivabilità. Algebra delle derivate (somma e sottrazione con dimostrazione), derivazione di funzioni composte (sd) e inverse (sd). Derivate di funzioni elementari ($y=\text{costante}$ e $y=x$ con dimostrazione). Derivata e funzioni monotone (crescenza e decrescenza). Test di monotonia (cd). Teorema di Fermat (sd), massimi e minimi relativi (locali) e assoluti per funzioni derivabili. Concavità, convessità e flessi. Derivate di ordine superiore e loro uso per lo studio della concavità di una funzione. Teoremi di Rolle, di Lagrange, di De L'Hopital (tutti sd). Differenziale (definizione, significato e proprietà).

Integrali. Integrale di Riemann, caratterizzazione dell'integrale e sue proprietà, teorema della media integrale (sd), teorema fondamentale del calcolo integrale e corollario (entrambi cd). Integrale definito e indefinito. Primitive notevoli, regole di integrazione, integrazione per parti (cd), metodo di sostituzione. Uso dell'integrale per il calcolo delle aree.

Algebra Lineare

Vettori. Equipollenza. Operazioni tra vettori (somma, prodotto di un vettore per uno scalare, prodotto scalare e vettoriale, angolo tra due vettori) e loro proprietà (cd). Vettore nullo e vettore opposto. Definizione di spazio vettoriale. Versori e combinazione lineare di vettori, dipendenza e indipendenza lineare.

Matrici. Matrici uguali, simmetriche e antisimmetriche, matrice trasposta, matrici diagonali e triangolari. Operazioni tra matrici e loro proprietà (cd): somma, prodotto di una matrice con uno scalare, prodotto tra matrici. Permutazioni. Segno di una permutazione. Definizione di determinante. Proprietà dei determinanti: il determinante di A è uguale al determinante della trasposta di A (cd); il determinante è nullo se due righe o colonne sono uguali (cd); linearità e alternanza rispetto a righe e colonne, teorema di Binet (sd). Matrici invertibili. Complementi algebrici e matrice aggiunta (o dei cofattori). Determinazione della matrice inversa. Rango di una matrice. Relazione tra rango di una matrice quadrata e determinante.

Trasformazioni lineari. Matrici come trasformazioni lineari: esempi. Autovalori e autovettori di una matrice e loro determinazione.

Sistemi lineari. Sistemi lineari quadrati, rettangolari, omogenei. Spazio delle soluzioni di un sistema lineare. Teorema di Cramer (sd). Teorema di Rouché-Capelli (sd). Metodo di Gauss-Jordan. Interpretazione geometrica dei sistemi lineari.