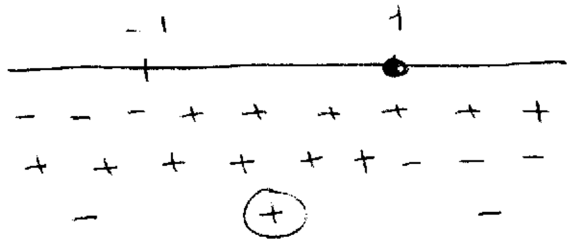
1) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

A) $\dfrac{1-x}{1+x} \geq 0$

- $1 - x \geq 0 \longrightarrow x \leq 1$
- $1 + x > 0 \longrightarrow x > -1$



D: $(-1, 1]$

B) ASSE y

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

ASSE x

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 1 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Quando l'indice della radice è pari la funzione è positiva in tutto il suo dominio

(C) Il dominio è l'intervallo $(-1, 1]$, aperto a sinistra e chiuso a destra. Per studiare il comportamento della funzione agli estremi del dominio possiamo calcolare direttamente il valore della funzione per $x=1$ e fare il limite destro per $x \to -1$.

$$\lim_{x \to -1^+} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = +\infty$$

C'è un asintoto verticale di equazione $x = -1$

$$f(1) = \sqrt{\frac{1-1}{1+1}} = 0$$

N.B. Si poteva evitare il calcolo ricorrendo ai risultati del punto B

(D) $$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \; \frac{-1 \cancel{-x} -1 \cancel{+x}}{2(1+x)^2} = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$$

Studiamo il dominio di $f'(x)$

$$\begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x} \geq 0 \\ 1+x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} > 0$$

- $1+x > 0 \to x > -1$
- $1-x > 0 \to x < 1$

	-1		1	
$1+x$	$-\;-$	$+\;+\;+$	$+\;+$	
$1-x$	$+\;+$	$+\;+\;+$	$-\;-$	
	$-$	$+$	$-$	

$D' = (-1, 1)$

Il punto di ascissa 1 è un punto di non derivabilità.

Per studiare come si comporta la derivata, e quindi la funzione, nei pressi del punto $(1, 0)$ ricorriamo all'operazione di limite.

$$\lim_{x \to 1^-} y' = \lim_{x \to 1^-} -\sqrt{\frac{\overset{\nearrow 2}{1+x}}{\underset{\searrow 0^+}{1-x}}} \cdot \frac{1}{\underset{\searrow 4}{(1+x)^2}} = -\infty$$

questo significa che la retta $x = 1$ è un asintoto verticale per la derivata e quindi la funzione ha retta tangente verticale nel punto $x = 1$.

- Per determinare l'eventuale presenza di punti stazionari cerchiamo se e dove si annulla la derivata prima di $f(x)$.

$$y' = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} = 0$$

$\frac{1}{(1+x)^2} = 0$ MAI

$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 0$ MAI IN D

Non ci sono punti stazionari

- Per studiare la monotonia della funzione studiamo il segno della derivata prima.

$$y' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-1}{(1+x)^2} > 0$$

- $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} > 0 \quad \forall x \in D'$
- $-1 > 0$ MAI
- $(1+x)^2 > 0 \quad \forall x \in D$

$y' < 0 \quad \forall x \in D$

La funzione è decrescente in tutto il dominio

−

+ + + + + +
− − − − − −
+ + + + + +

Ⓔ Per studiare la concavità della funzione ricorro alla derivata seconda della funzione.

$$y'' = -\left[\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot (-2)\frac{1}{(1+x)^3}\right]$$

$$= -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left[\frac{\overset{\cancel{2}\,1}{1 \cancel{-x} + 1 \cancel{+x}}}{2(1-x)^2(1+x)^2} - \frac{\cancel{1+x}}{1-x}\;\frac{2}{(1+x)^{\cancel{3}\,2}}\right]$$

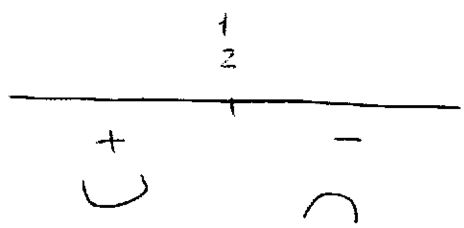
$$= -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\;\frac{1-2(1-x)}{(1-x)^2\cdot(1+x)^2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1-2x}{(1-x)^2(1+x)^2}$$

$$D'' = D'$$

$y'' = 0$ per $x = 1 \notin D''$

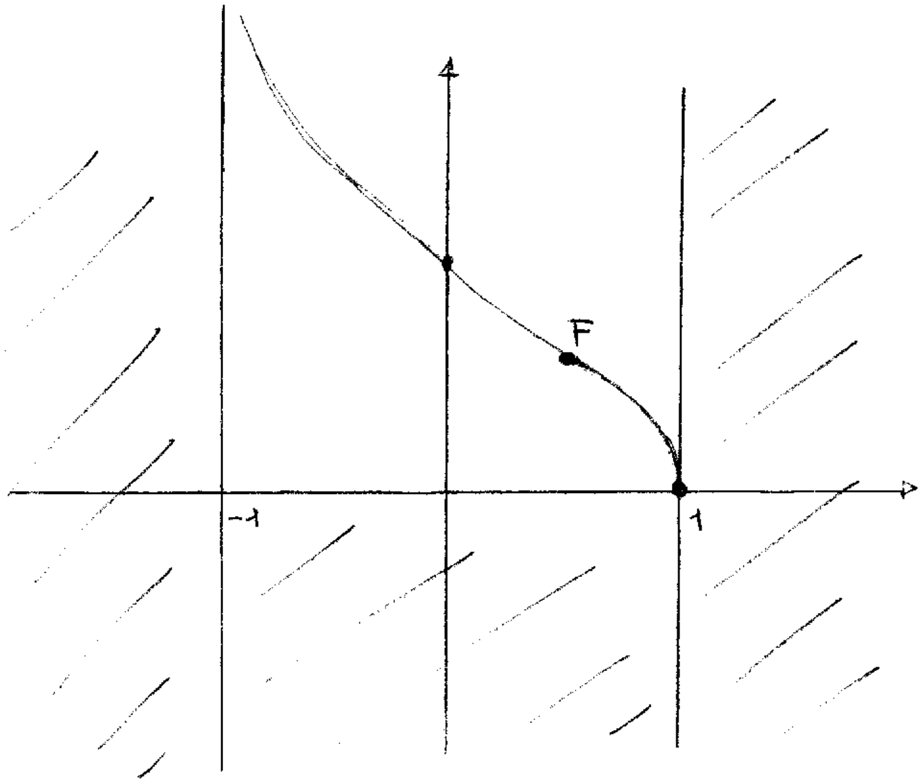
$$1 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{2}$$

$y'' > 0$ per $1 - 2x > 0 \;\Rightarrow\; x < \frac{1}{2}$



Il punto di ascissa $\frac{1}{2}$ è un flesso a tangente obliqua. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

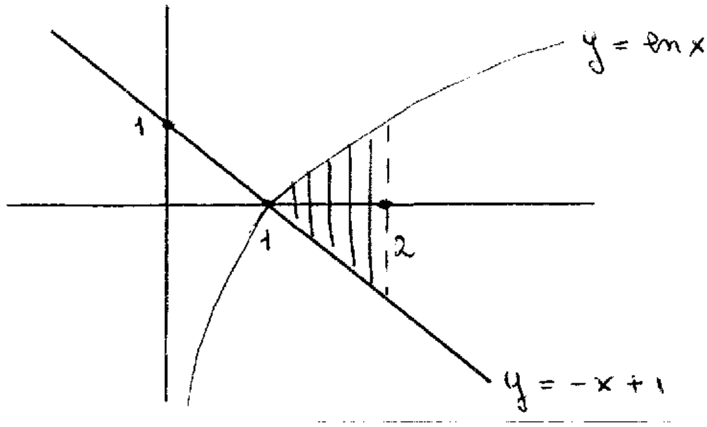
(F)



(G) Il punto di ascissa 1 è un punto di non derivabilità. Non è quindi possibile usare la formula/tecnica standard che prevederebbe il calcolo della derivata in quel punto.

Al punto (D) di questo esercizio abbiamo osservato che in $P(1,0)$ la derivata va ad ∞ e quindi la retta tangente è verticale, di equazione $x = 1$.

(2) Rappresentiamo graficamente le curve indicate nel testo per capire qual è la regione di cui si vuole conoscere l'area.



$$A = \int_1^2 \left[\ln x - (-x+1)\right] dx$$

$$= \left[x \ln x - x + \frac{x^2}{2} - x \right]_1^2$$

$$= 2 \ln 2 + \frac{1}{2}$$

Per risolvere l'integrale lo si decompone in $\int \ln x\,dx$ e $\int x - 1\,dx$.

Il primo integrale si risolve ricorrendo al metodo di integrazione per parti

$$\int \ln x\,dx = \int \underset{\substack{\downarrow \\ g'(x) \\ \Downarrow \\ g(x)=x}}{1} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)}}{\ln x}\,dx = x \cdot \ln x - \underbrace{\int x \cdot \frac{1}{x}\,dx}_{x}$$

Il secondo integrale è immediato.

(3) $\underline{v} = (1, -6, -3)$

$\underline{w} = \underline{i} + 2\underline{j} - 3\underline{k} = (1, 2, -3)$

$\underline{v} + \underline{w} = (1+1, -6+2, -3+(-3)) = (2, -4, -6)$

$\underline{v} \circ \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\underline{v} \circ \underline{w}}{|\underline{v}| \cdot |\underline{w}|}$

$\underline{v} \circ \underline{w} = 1 \cdot 1 + (-6) \cdot 2 + (-3)(-3) = 1 - 12 + 9 = -2$

$|\underline{v}| = \sqrt{1^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+36+9} = \sqrt{46}$

$|\underline{w}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

Quindi $\cos\Theta = \dfrac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}} = -\dfrac{1}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{7}}$

$\Theta \simeq 96°$

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -6 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (18+6, -(-3+3), 2+6)$$

$$= (24, 0, 8)$$

④ Scriviamo il sistema nella forma $A\underline{x} = \underline{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A|b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo il rango di $A|b$

$$\det(A|b) = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1-10) + (3-5) + 4(6-1)$$

$$= -18 - 2 + 20 = 0 \quad \Rightarrow r(A|b) < 3$$

consideriamo un minore d'ordine 2 di $A|b$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 10 = -9 \neq 0 \quad \Rightarrow r(A|b) = 2$$

Per determinare il rango di A dobbiamo prendere un minore d'ordine 2. Scegliamo lo stesso di A|b e possiamo concludere che $r(A) = 2$

Per il teorema di Rouché-Capelli se $r(A) = r(A|b)$ il sistema è compatibile e ha ∞^{n-2} soluzioni.

Nel nostro sistema la 3ª equazione è ridondante (è data da eq. 2 - eq. 1) e può essere eliminata.

Il rimanente sistema 2x2 è compatibile e ha 1 soluzione, che determiniamo col metodo di Gauss-Jordan

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \qquad R_2 = 2R_2 - 3R_1 \qquad \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 5y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 4 - \frac{2}{5} \\ y = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

La soluzione è la coppia $\left(\frac{9}{5}, -\frac{2}{5}\right)$