$$y = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

(A) La variabile è presente al denominatore, quindi deve avere valore non nullo affinché l'espressione non perda significato

$x \neq 0$ $\qquad$ $D: (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

(B) Nessuna intersezione possibile con l'asse y (di equazione $x = 0$) perché $x = 0$ non appartiene al dominio.

ASSE X

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} = 0 \end{cases} \quad \text{MAI}$$

Non ci sono intersezioni neppure con l'asse x.

Studiamo il segno della funzione.

$e^{\frac{1}{x}} > 0 \qquad \forall x \in D$

$x^2 > 0 \qquad \forall x \in D$

La funzione è positiva in tutto il dominio.

(C) • $$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \underbrace{\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}}_{0} = 0$$

La retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale

$$\bullet \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \underbrace{\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}}_{e^{\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}} = 0} \cdot \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$-\infty$

Per risolvere la forma indeterminata possiamo scrivere la funzione nella forma equivalente $y = \dfrac{x^{-2}}{e^{-\frac{1}{x}}}$ ottenendo così

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^{-2}}{e^{-\frac{1}{x}}} = \underbrace{\lim_{x \to 0^-} x^{-2}}_{+\infty} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{e^{-\frac{1}{x}}}}_{1/+\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

ma $e^{-\frac{1}{x}}$ è un infinito di ordine superiore e, mediante la tecnica del confronto tra infiniti, possiamo concludere che

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = 0^+$$

$$\bullet \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \underbrace{\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}}_{\downarrow \atop +\infty} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2}}_{\downarrow \atop +\infty} = +\infty$$

È presente un asintoto verticale destro di eq. $x = 0$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}}_{\downarrow \atop 0} = 0$$

La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale anche per $x \to +\infty$

(D) Per determinare la presenza di punti stazionari e studiare la monotonia della funzione uso la derivata prima e le sue proprietà.

$$y' = \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)x^2 - e^{\frac{1}{x}} \cdot 2x}{x^4} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} \cdot \frac{x^2 + 2x^3}{x^2} = \frac{-\cancel{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^{4}}$$

I punti stazionari sono quei punti in cui la derivata prima si annulla

$$y' = 0 \Rightarrow -\frac{e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4} = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}}(1+2x) = 0$$

$e^{\frac{1}{x}} = 0$ mai

$(1+2x) = 0 \Downarrow x = -\frac{1}{2}$

La funzione è crescente negli intervalli in cui la derivata prima è positiva.

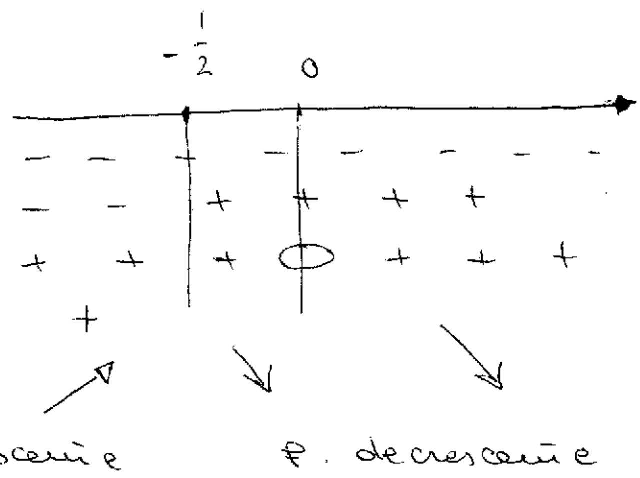
$$y' > 0 \Rightarrow -\frac{e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4} > 0$$

$-e^{\frac{1}{x}} > 0$ mai

$1 + 2x > 0$ per $x > -\frac{1}{2}$

$x^4 > 0 \quad \forall x \in D$

Il punto stazionario di ascissa $-\frac{1}{2}$ è un massimo relativo



(E) Per determinare i punti di massimo o minimo assoluti, conoscendo continuità e monotonia di una funzione, in un intervallo chiuso e limitato dobbiamo calcolare il valore della funzione agli estremi dell'intervallo e confrontarlo con le ordinate degli eventuali massimi e minimi relativi interni all'intervallo

$$f(-1) = \frac{e^{-1}}{(-1)^2} = \frac{1}{e} \simeq 0,37$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{e^{-3}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{e^3} \simeq 0,45$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{e^2} \simeq 0,54$$

il punto $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{e^2}\right)$ è un massimo assoluto nell'intervallo $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$

Nello stesso intervallo il punto $m\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ è un punto di minimo assoluto.

(F) Per lo studio della concavità della funzione usiamo la derivata seconda.

- $$y'' = -\frac{\left[e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)(1+2x) + e^{\frac{1}{x}} \cdot 2\right] x^{\cancel{4}} - e^{\frac{1}{x}}(1+2x)\, 4\cancel{x}^{3}}{x^{\cancel{8}\,5}}$$

$$= -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^5}\left[\frac{-\cancel{x}^{1} - 2x^{\cancel{2}} + 2x^{\cancel{3}\,2}}{x^{\cancel{2}}} - 4(1+2x)\right] = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^6}\left(6x^2 + 6x + 1\right)$$

I punti di flesso, essendo punti in cui cambia la concavità, si determinano ponendo pari a 0 la derivata seconda:

$$y'' = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^6}(6x^2+6x+1) = 0$$

$e^{\frac{1}{x}} = 0$ MAI

$6x^2+6x+1 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-24}}{12} = \begin{cases} \frac{-3-\sqrt{3}}{6} \\ \frac{-3+\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Per studiare la concavità della funzione si studia il segno della derivata seconda

$$y'' = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^6}(6x^2+6x+1) > 0$$

$e^{\frac{1}{x}} > 0 \quad \forall x \in D$

$x^6 > 0 \quad \forall x \in D$

$6x^2+6x+1 > 0$ per $x > \frac{-3+\sqrt{3}}{6}$

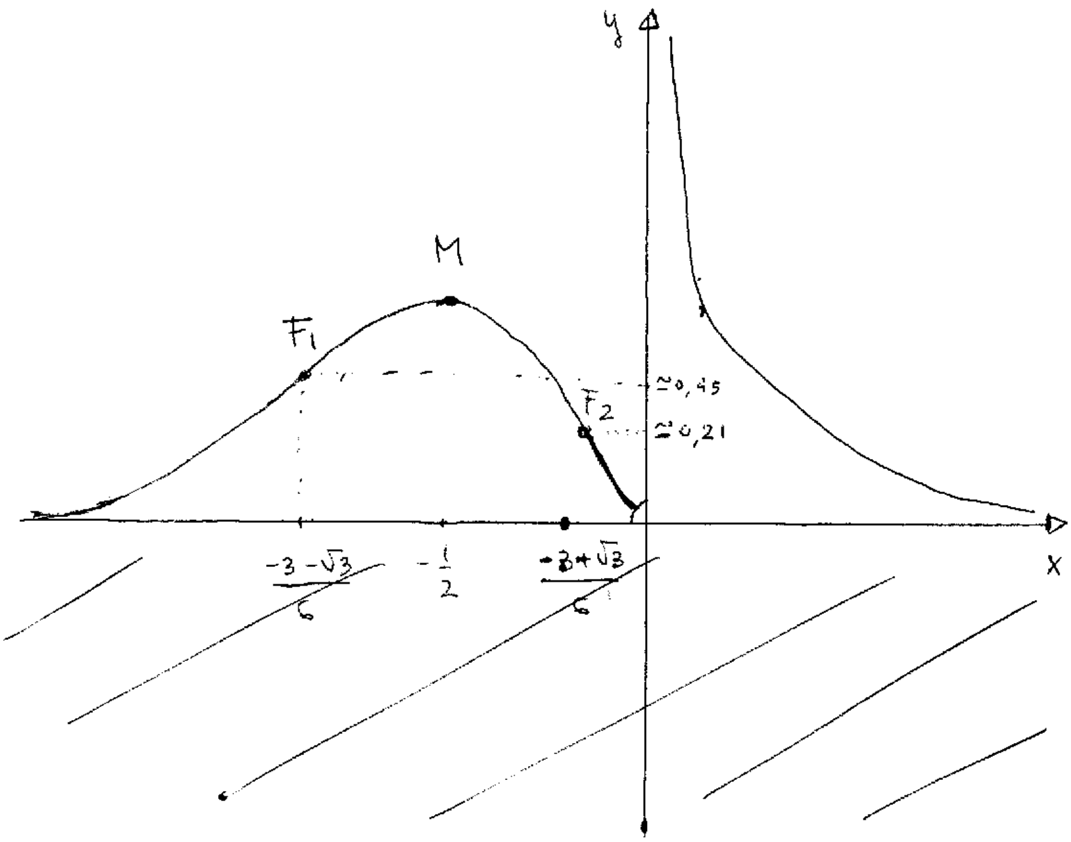
e per $x < \frac{-3-\sqrt{3}}{6}$

$\frac{-3-\sqrt{3}}{6}$ $\quad$ $\frac{-3+\sqrt{3}}{6}$

\+ + − − − − + +

∪ ∩ ∪

(G)



(H) L'equazione della retta tangente ad una curva di equazione $y = f(x)$ nel punto $P(x_0, y_0)$ è

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$y_0 \to f(1) = e$, $\quad f'(x_0) \to f'(1) = -3e$, $\quad x_0 \to 1$

$$\longrightarrow \quad y = \underbrace{-3e}_{\text{coeff. angolare}} \cdot x \underbrace{+ 4e}_{\text{termine noto}}$$

(I) Per il calcolo dell'area uso gli integrali definiti. Poiché la funzione è sempre positiva

$$A = \int_1^2 e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \, dx = -\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

E' l'integrale della funzione composta $e^{\frac{1}{x}}$

$$A = -\left[e^{\frac{1}{x}} \right]_1^2 = -\left(e^{\frac{1}{2}} - e \right) = e - \sqrt{e} \simeq 1{,}1$$

Usando il metodo di sostituzione e ponendo $\frac{1}{x} = t$

avremo avuto $-\frac{1}{x^2} dx = dt$

$x = 1 \Rightarrow t = 1$

$x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$$A = \int_1^{\frac{1}{2}} e^t (-dt) = -\int_1^{\frac{1}{2}} e^t \, dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t \, dt = \left[e^t \right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= e - \sqrt{e}$$