1) A) L'estrazione della radice cubica è un'operazione che può essere eseguita su qualunque numero reale. Il suo argomento è un polinomio, definito, quindi, in tutto $\mathbb{R}$. Per questi motivi il dominio della funzione è $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

B) $\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{x^2 - 5x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{0} = 0 \end{cases}$

La curva passa per l'origine $O(0,0)$

$\begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt[3]{x^2 - 5x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt[3]{x^2 - 5x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x-5) = 0 \end{cases}$ $x = 0$, $x = 5$

La curva passa anche per $A(5,0)$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x} > 0$$

L'operazione di radice cubica restituisce un numero positivo solo quando il suo argomento è positivo, quindi

$x^2 - 5x > 0 \Rightarrow x(x-5) > 0$

		0		5	
$x > 0$	$- \; -$		$+ \; +$		$+ \; +$
$x > 5$	$- \; -$		$- \; -$		$+ \; +$
	$+$		$-$		$+$

La funzione è positiva per $x < 0 \vee x > 5$ e negativa per $0 < x < 5$.

(c) • $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2-5x} = [\infty - \infty]_{F.I.}$

Per risolvere questo tipo di forme indeterminate possiamo mettere in evidenza il termine di grado maggiore

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2-5x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 (1-\underbrace{\tfrac{5}{x}}_{\downarrow \, 0})} = +\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali ma potrebbero esserci asintoti obliqui.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2-5x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2-5x}{x^3}}$$

$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right]_{F.I.} = 0$ la forma indeterminata si risolve col metodo del confronto tra infiniti, osservando che il denominatore è un polinomio di grado maggiore rispetto al numeratore e quindi è un infinito di ordine superiore.

Avendo trovato $m=0$ possiamo concludere che non ci sono asintoti obliqui.

• $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\underbrace{x^2}_{\downarrow \, +\infty} \underbrace{-5x}_{\downarrow \, +\infty}} = +\infty$

Per le stesse motivazioni esposte precedentemente possiamo concludere che non ci sono asintoti orizzontali o obliqui.

D $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x} = (x^2 - 5x)^{\frac{1}{3}}$ È UNA FUNZIONE COMPOSTA

$$y' = \frac{1}{3}(x^2 - 5x)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (2x - 5) = \frac{2x - 5}{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}}$$

La presenza di una frazione ci indica a imporre che il denominatore sia diverso da 0

$\sqrt[3]{(x^2-5x)^2} \neq 0 \iff (x^2 - 5x)^2 \neq 0 \iff x(x-5) \neq 0$ — $x \neq 0$, $x \neq 5$

$D' = \mathbb{R} - \{0, 5\} \subseteq D$

I punti $O(0,0)$ e $A(5,0)$ sono pt. di non derivabilità

Per studiarne la tipologia dobbiamo calcolare i limiti di $f'(x)$ per $x \to 0^\pm$ e per $x \to 5^\pm$

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{\overbrace{2x - 5}^{\to -5}}{\underbrace{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}}_{\to 0}} = -\infty$$

Il punto $O(0,0)$ è un flesso a tangente verticale, discendente

$$\lim_{x \to 5^\pm} \frac{\overbrace{2x - 5}^{\to +5}}{\underbrace{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}}_{\to 0}} = +\infty$$

Il punto $A(5,0)$ è un flesso a tangente verticale, ascendente

N.B. Lo studio dei limiti non era necessario. Scopriremo che i punti O e A sono flessi anche con lo studio della derivata seconda, ed essendo pt. di non derivabilità devono necessariamente ~~essere~~ flessi a tg. verticale.

(E) I punti stazionari sono quei punti della curva che hanno retta tangente orizzontale e quindi in cui

$f'(x) = 0$

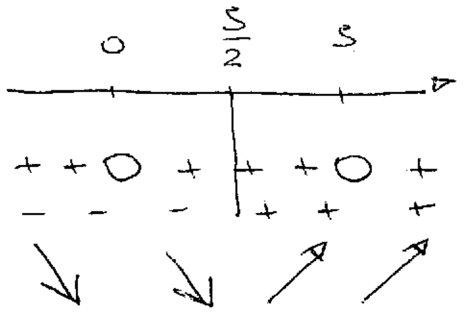
$$\frac{2x-5}{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}} = 0 \Rightarrow 2x-5=0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Per studiare gli intervalli di monotonia studiamo il segno della derivata prima

$$\frac{2x-5}{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}} > 0$$

$2x-5>0$ per $x > \frac{5}{2}$

$3\sqrt[3]{(x^2-5x)^2} > 0 \quad \forall x \in D'$



Il punto di ascissa $\frac{5}{2}$ è un minimo relativo.
La funzione è crescente in $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ e decrescente in $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$

(F) La concavità della funzione si può studiare attraverso la sua derivata seconda

$$f''(x) = \frac{1}{3}\,\frac{2\cdot\sqrt[3]{(x^2-5x)^2} - (2x-5)\,\frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^4}}\cdot 2(x^2-5x)\cdot(2x-5)}{\left(\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^4}}\cdot\frac{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^{\cancel{6}\,2}} - (x^2-5x)(2x-5)^2}{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^4}} =$$

$$= \frac{2}{9\sqrt[3]{(x^2-5x)^8}} \cdot (x^2-5x)\left[\boxed{3}(x^2-5x) - (2x-5)^2\right]$$

$$= \frac{2}{9\,(x^2-5x)^{\cancel{2}}\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}}\,\cancel{(x^2-5x)}\left[3x^2-15x - 4x^2 - 25 + 20x\right]$$

$$= \frac{-2\,(x^2-5x+25)}{9\,(x^2-5x)\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}} = -\frac{2\,(x-5)^{\cancel{2}}}{9\,x\,\cancel{(x-5)}\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}}$$

$$= -\frac{2}{9}\,\frac{x-5}{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}}$$

$D'' = D' = \mathbb{R} - \{0, 5\}$

$$y'' = -\frac{2}{9}\,\frac{x-5}{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}} > 0$$

- $-\frac{2}{9}(x-5) > 0$ per $x < 5$
- $x > 0$
- $\sqrt[3]{(x^2-5x)^2} > 0 \quad \forall x \in D''$

$\cap \quad 0 \quad \cup \quad 5 \quad \cap$

$- \; - \; + \; + \; + \; + \; +$

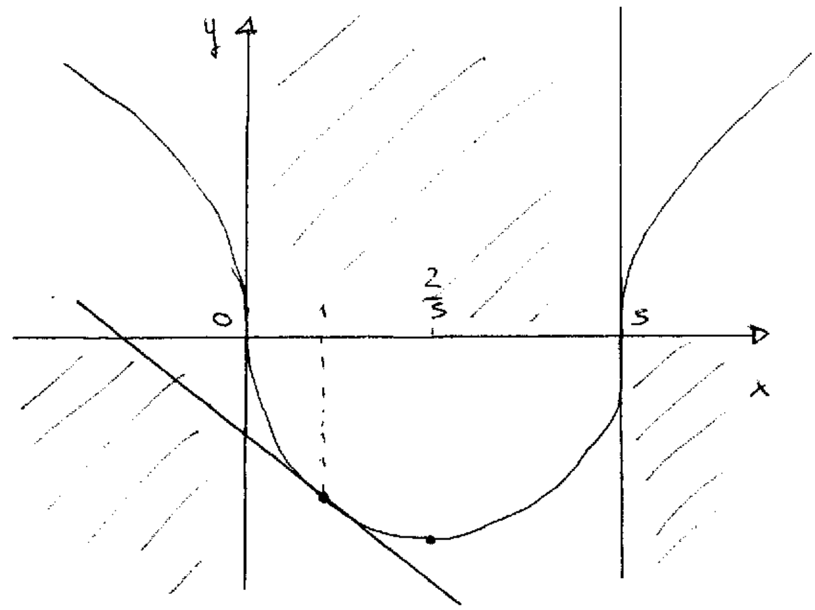
$+ \; + \; + \; + \; - \; - \; -$

$+ \; + \; 0 \; + \; + \; 0 \; + \; +$

La funzione rivolge la concavità verso il basso quando $x \in (-\infty, 0)$ e $(5, +\infty)$, e rivolge la concavità verso l'alto quando $x \in (0, 5)$.

Nei punti O e A si osserva un cambio di concavità ma non si annulla né la derivata prima né la derivata seconda. Non sono quindi flessi a tg orizzontale o obliqua. In O e A si osserva che la derivata prima e seconda non sono definite. Sono quindi flessi a tg. verticale.

(G)



(H) La retta tangente ad una curva $y = f(x)$ nel punto $P(x_0, f(x_0))$ ha equazione

$$y - \underset{\sqrt[3]{-4}}{\underset{\downarrow}{f(x_0)}} = \underset{-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}}{\underset{\downarrow}{f'(x_0)}} \, (x - \underset{1}{\underset{\downarrow}{x_0}})$$

Quindi $y = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}(x-1) - \sqrt[3]{4}$

(2) $$\int_1^2 \left[\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{x} + \cos(3x-3) \right] dx =$$

Applicando le proprietà degli integrali possiamo scomporre nella somma di 3 integrali, come segue:

$$= \int_1^2 x^{\frac{2}{3}}\, dx - 2 \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx + \frac{1}{3} \int_1^2 3\cos(3x-3)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{5}{3}} \right]_1^2 - 2 \left[\ln|x| \right]_1^2 + \frac{1}{3} \left[\sin(3x-3) \right]_1^2$$

$$= \frac{3}{5} \left(\sqrt[3]{2^5} - \sqrt[3]{1} \right) - 2 \left(\ln 2 - \underbrace{\cancel{\ln 1}}_{0} \right) + \frac{1}{3} \left(\sin 3 - \underbrace{\cancel{\sin 0}}_{0} \right)$$

$$= \frac{3}{5} \left(\sqrt[3]{32} - 1 \right) - 2 \ln 2 + \frac{1}{3} \sin 3$$

(3) Il sistema è quadrato. Scriviamolo in forma matriciale $A\underline{x} = \underline{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (2-1) + 2(6-4) = 5$$

$\det A \neq 0$

Il Teorema di Cramer dice che un sistema lineare quadrato in cui la matrice dei coefficienti ha $\det \neq 0$ ammette una sola soluzione.

Quindi, per il T. di Cramer, il sistema è compatibile e ha 1 soluzione.

Possiamo trovare la soluzione mediante il metodo di Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{4(2-1)+2(0+3)}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{1(0+3)-4(6-4)}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{4(3-4)+(-3)(1+6)}{5} = \frac{-25}{5} = -5$$

La soluzione è la terna $(2, -1, -5)$.

Possiamo verificare di aver trovato la soluzione corretta sostituendo nelle equazioni del sistema e vedendo che si trasformano tutte in identità

$$\begin{cases} 2-(-2) = 4 \\ 6-1-5 = 0 \\ 8-1-10 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ 0 = 0 \\ 3 = 3 \end{cases} \quad \text{Ok}$$

(4) $A * B - 3B$

$$3B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A * B - 3B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det B = -2 \neq 0 \Rightarrow$ la matrice è invertibile

$$B^{-1} = \frac{(\text{cof } B)^T}{\det B} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{cof } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (\text{cof } B)^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo controllando che $B \cdot B^{-1} = I$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1+0 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ 0+0 & 0+2\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

Gli autovettori di una matrice sono quei vettori la cui direzione non viene cambiata dalla trasforma= zione rappresentata dalla matrice. Quindi

$A\underline{v} = \lambda \underline{v}$. Essi esistono se $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

AUTOVALORI

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Gli autovalori di A sono $\lambda = -2$ e $\lambda = 3$.

Cerchiamo ora gli autovettori associati a ciascun autovalore $(A - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$

$$\lambda = -2 \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 + 3v_2 = 0 \\ \cancel{2v_1 + 3v_2 = 0} \end{cases} \qquad v_1 = -\frac{3}{2}v_2$$

$$\left(-\frac{3}{2}t,\ t\right)$$

$$\lambda = 3 \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{3}v_1 + \cancel{3}v_2 = 0 \\ \cancel{2v_1 - 2v_2 = 0} \end{cases} \qquad v_1 = v_2$$

$$(t,\ t)$$

Gli autovettori della trasformazione A sono

(t, t) e $\left(-\frac{3}{2}t,\ t\right)$

$\downarrow$ bisettrice quadranti I e III

associata all'autovalore $\lambda = 3$

$\downarrow$ $x = -\frac{3}{2}y$

associata all'autovalore $\lambda = -2$