(1) $y = x^2 \cdot e^{-2x}$

La funzione può essere scritta anche nella forma

$$y = \frac{x^2}{e^{2x}}$$

(A) D: $e^{2x} \neq 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

infatti la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva

D: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

(B) ASSE y

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 \cdot e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \cdot \underbrace{e^0}_{1} = 0 \end{cases}$$

ASSE x

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 \cdot e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = x^2 \cdot e^{-2x} \end{cases}$$

$x^2 = 0 \Downarrow x = 0$ $\qquad$ $e^{-2x} = 0$ $\quad \nexists x \in \mathbb{R}$

La curva passa per l'origine $O(0,0)$

$$y = \frac{x^2}{e^{2x}} > 0$$

$x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La funzione è positiva $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(C) $\lim_{x \to -\infty} \underbrace{x^2}_{\downarrow \atop +\infty} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{\downarrow \atop +\infty} = +\infty$ Potrebbe esserci un asintoto obliquo.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \cdot e^{-2x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} x \cdot e^{-2x} = +\infty$$

NON C'E' ASINTOTO

$$\lim_{x \to +\infty} \underset{\downarrow \atop +\infty}{x^2} \cdot \underset{\downarrow \atop 0}{e^{-2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0^+$$

Poiché l'esponenziale è un infinito di ordine superiore rispetto al polinomio e quindi il denominatore domina sul numeratore.

E' presente un asintoto orizzontale di equazione $y=0$ (ASSE x)

(D) Per studiare la monotònia della funzione ed individuare gli eventuali punti stazionari calcoliamo la derivata prima della funzione.

$$y' = 2x \cdot e^{-2x} + x^2 \cdot e^{-2x}(-2) = 2x \cdot e^{-2x}(1-x)$$

$y' = 0$

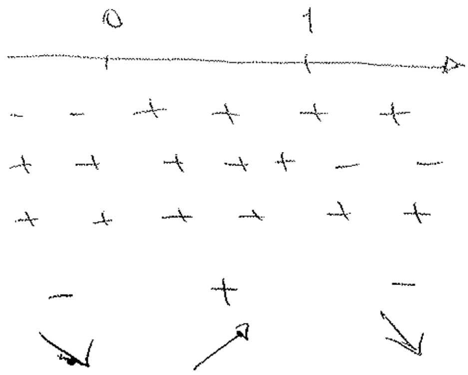
- $2x = 0 \Rightarrow x = 0$
- $e^{-2x} = 0 \quad \nexists x \in R$
- $1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

Ci sono due punti stazionari di ascissa $x=0$ e $x=1$

$$y' > 0 \qquad 2x > 0 \quad \text{per } x > 0$$

$$e^{-2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$1 - x > 0 \quad \text{per } x < 1$$



La funzione è decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(1, +\infty)$ e crescente in $(0, 1)$. Il punto $(0, 0)$ è un minimo relativo e il punto $\left(1, \frac{1}{e^2}\right)$ è un massimo relativo.

E) Per studiare la concavità della funzione calcoliamo la derivata seconda della funzione.

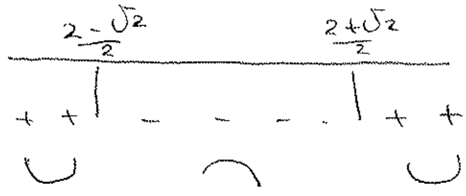
$$y' = 2x \cdot e^{-2x}(1-x) = \frac{2x - 2x^2}{e^{2x}}$$

$$y'' = \frac{(2-4x)e^{2x} - (2x-2x^2)\,e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x})^2} = \frac{2\cancel{e^{2x}}(1-2x-2x+2x^2)}{(e^{2x})^2}$$

$$= 2 \cdot e^{-2x}(2x^2 - 4x + 1)$$

$$y'' = 0 \begin{cases} 2e^{-2x} = 0 & \nexists x \in \mathbb{R} \\ 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \begin{cases} \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$y'' > 0 \begin{cases} 2e^{-2x} > 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ 2x^2 - 4x + 1 > 0 \end{cases}$$



La funzione rivolge la concavità verso l'alto in $\left(-\infty, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ e in $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ e rivolge la concavità verso il basso in $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$

I punti di ascissa $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ e $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ sono flessi a tangente obliqua.

(F) $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

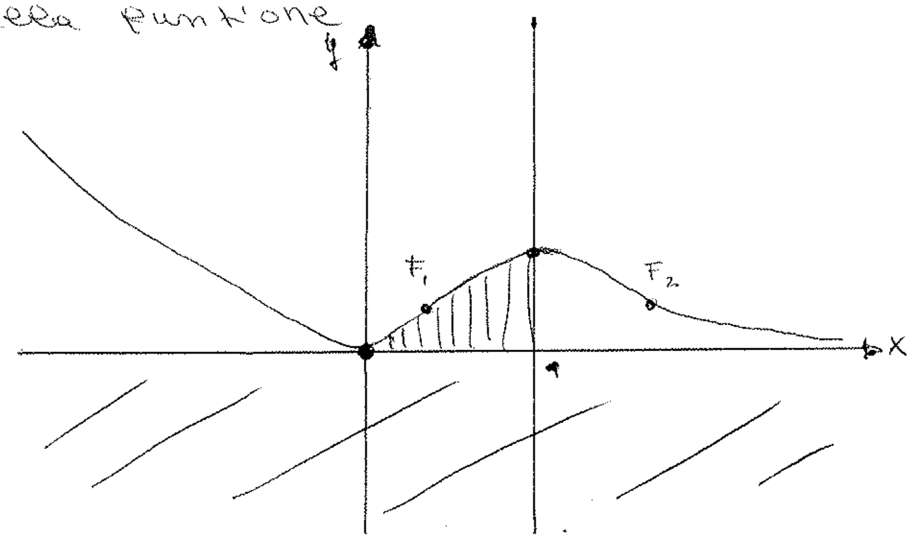
$f'(2) = -4e^{-4}$, $x_0 = 2$

$f(2) = 4 \cdot e^{-4}$

$$y = -\frac{4}{e^4}x + \frac{8}{e^4} + \frac{4}{e^4}$$

$$y = -\frac{4}{e^4}x + \frac{12}{e^4}$$

(G) Per determinare l'area della zona indicata nel testo dobbiamo prima disegnare il grafico della funzione



L'area della zona indicata si determina calcolando

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \cdot e^{-2x}\, dx$$

Risolviamo l'integrale usando il metodo di integrazione per parti con $f(x) = x^2$ e $g'(x) = e^{-2x}$

$$\Downarrow$$

$$g(x) = \frac{e^{-2x}}{-2}$$

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx = \Big[f(x) \cdot g(x) \Big]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Nel nostro caso si ha

$$\left[x^2 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 - \int_0^1 \cancel{2} x \cdot \frac{e^{-2x}}{-\cancel{2}}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2} - 0 + \int_0^1 x \cdot e^{-2x}\, dx$$

Usiamo ancora il metodo di integrazione per parti con $f(x) = x$ e $g'(x) = e^{-2x} \Rightarrow g(x) = \frac{e^{-2x}}{-2}$

ottenendo

$$= -\frac{1}{2} e^{-2} + \left[x \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 1 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2}\, dx}_{\left[\frac{e^{-2x}}{+4} \right]_0^1}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-2} - 0 - \frac{e^{-2}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} e^{-2} > 0$$

(2) $(-3+3i)^2 + \frac{6}{-3+3i} + \frac{2}{5}(5+5i\sqrt{3}) - 2i\sqrt{3}$

$= \cancel{9} + \underbrace{9i^2}_{\cancel{-9}} - 18i + \frac{6}{-3+3i} \cdot \frac{-3-3i}{-3-3i} + \frac{2}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5}(1+i\sqrt{3}) - 2i\sqrt{3}$

$= -18i + \cancel{6}\, \frac{-3-3i}{\cancel{+18}\ 3} + 2 + \cancel{2i\sqrt{3}} - \cancel{2i\sqrt{3}}$

$= -18i - \frac{\cancel{3}(1+i)}{\cancel{3}} + 2 = -18i - 1 - i + 2 = -19i + 1$

(3) le sistema $\begin{cases} -x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$ è omogeneo e

quindi sempre compatibile, ammettendo sicuramente la soluzione banale $(0,0,0)$. Non siamo, però, in grado di dire se ci siano altre soluzioni, se non studiando le matrici associate al sistema.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad A|b = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

$\det A = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(5-3) - 2(10-1) + 4(6-1)$

$= -2 - 18 + 20 = 0$

$\Downarrow$

$r(A) < 3$

Consideriamo allora un minore di ordine 2 di A, per esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2$$

Per quanto riguarda $A|b$ ogni minore di ordine 3 che contenga la colonna 4 è nullo e l'unico altro minore è A, il cui $\det A = 0$. Quindi $r(A|b) < 3$.

Possiamo prendere lo stesso minore di ordine 2 scelto per A, trovando che $r(A|b) = 2$

Poiché $r(A) = r(A|b)$ per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette ∞^1 soluzioni, che troveremo applicando il metodo di Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} -x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ \cancel{x + 3y + 5z = 0} \end{cases}$$

Poichè sappiamo che il rango è 2, una equazione è dipendente dalle altre e può essere eliminata

$$\begin{cases} -x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{R_2 = R_2 + 2R_1} \begin{cases} -x + 2y + 4z = 0 \\ 5y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{18}{5}z + 4z \\ y = -\frac{9}{5}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5}z \\ y = -\frac{9}{5}z \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono tutte le terne del tipo

$$\left(\frac{2}{5}t, -\frac{9}{5}t, t \right)$$

Poichè $t \in \mathbb{R}$ anche $\frac{2}{5}t$ e $-\frac{9}{5}t \in \mathbb{R}$.